УДК 330.46
DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2020.2.37

Лобода О.М.
кандидат технічних наук, доцент,
Державний вищий навчальний заклад
«Херсонський державний аграрний університет»
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9826-9443

Loboda Olena
State Higher Educational Institution
«Kherson State Agrarian University»

ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ РОЗВИТКУ АГРАРНОГО ПІДПРИЄМСТВА У ВИГЛЯДІ МАГІСТРАЛІ ЗРОСТУ

USING THE MODEL OF THE DEVELOPMENT DYNAMIC OF ANAGRICULTURAL ENTERPRISE IN THE FORM OF A GROWTH HIGHWAY

Досліджено комплексний метод ідентифікації пов'язаний з побудовою оптимізаційної моделі, кінцевим результатом якого при використанні знайдених виробничих функцій буде виробіток рекомендацій для прийняття рішень по розподілу засобів між галузями. Встановлено необхідність створення, на основі достатніх умов оптимальності, моделі оптимального розвитку аграрного підприємства. Розроблена основна характеристика збалансованого росту (магістраль) аграрного підприємства та розглянута задача оптимізації моделі з урахуванням запізнювання введення основних виробничих засобів. Розроблена модель динамічної виробничої функції та обґрунтований підхід до визначення характеристик виробництва на її основі. Показано, що побудовані моделі та виконаний аналіз дозволили намітити замикання моделі, що вимагає, у свою чергу, розглянути задачі поведінки споживача в різних умовах.

Ключові слова: *модель, економіко-математичне моделювання, система управління, ідентифікація системи, виробничі функції, оптимізація управління.*

Исследован комплексный метод идентификации связанный с построением оптимизационной модели, конечным результатом которого, при использовании найденных производственных функций, будет выработка рекомендаций для принятия решений по распределению средств между отраслями. Установлена необходимость создания, на основе достаточных условий оптимальности, модели оптимального развития аграрного предприятия. Разработана основная характеристика сбалансированного роста (магистраль) аграрного предприятия и рассмотрена задача оптимизации модели с учетом запаздывания введения основных производственных средств. Построена модель динамической производственной функции и обоснован подход на ее основе по нахождению характеристик производства. Показано, что построенные модели и выполненный анализ позволили наметить замыкания модели, что требует, в свою очередь, рассмотреть задачи поведения потребителя в различных условиях.

Ключевые слова: *модель, экономико-математическое моделирование, система управления, идентификация системы, производственные функции, оптимизация управления.*

The research deals with investigation of the complex identification method that is connected with the construction of an optimization model. The findings may be useful in development of recommendations for decision-making on the allocation of funds between sectors. The necessity of creating the model of optimal development of the agricultural enterprise is established on the basis of sufficient optimal conditions. The basic characteristic of balanced growth of the agricultural enterprise is developed. The problem of the optimization model is taking into account with the delay of introduction main production facilities. Ensuring a high level of adoption of appropriate decisions in various directions of administrative activity of the agrarian sector of the economy requires the construction of a modern information society, which requires the development, implementation and use of new information technologies.

In a difficult market economy one of the main directions is the increase of efficiency functioning of agrarian enterprises through the construction of automated control systems and the use of modern information technologies. In these conditions, the solution of the task of optimal control leads to the solution of the management problem in the form of distribution resources between industries. In modern conditions, the requirements for the efficiency operation of the enterprise do not meet the traditional management capabilities. The research focuses on the creation of information methods and models of automated control systems based on modern computer tools. The study allows to solve tasks of choosing management decisions for individual industries, as well as for the economy as a whole on the basis of comparative analysis of production functions. The paper shows the adaptation necessity and updating models and methods of management of agrarian enterprises, using the volume of investments as a controlling influence, as well as clarification of delay model in the development of capital investments. The results of the research show the necessity of creation of the optimal development model of the agricultural enterprise on the basis of sufficient optimality conditions. This allows the development of main characteristic of the balanced growth of the agricultural enterprise. The task of optimization model is done with taking into account the delay of introduction of the main production means, choosing as a criterion of optimality common to any economy as maximum consumption.

Key words: *model, economic-mathematical modeling, control system, system identification, production functions, optimization of management.*

Постановка проблеми. Забезпечення високого рівня прийняття відповідних рішень в різних напрямках управлінської діяльності аграрного сектору економіки потребує побудову сучасного інформаційного суспільства, що вимагає розробку, впровадження та використання нових інформаційних технологій. Одним з головних напрямків, в умовах складної ринкової економіки, є підвищення ефективності функціонування аграрних підприємств, що здійснюється шляхом побудови автоматизованих систем управління та використання сучасних інформаційних технологій. Рішення задачі оптимального управління, в цих умовах, призводить до вирішення задачі управління у вигляді розподілу ресурсів між галузями. Знаходження оптимальних управлінь, що визначають найбільшу ефективність результатів функціонування, передбачає побудову моделей об'єктів управління, а також рішення багатокрокової задачі знаходження оптимальних управлінь при заданому функціоналі ефективності функціонування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З літературних джерел встановлено, що вирішення проблем управління має особливості, пов'язані з їхньою динамікою, відмінної від стаціонарних станів, а також відіграє надзвичайну роль, з погляду прийняття відповідних рішень. Існуючі теорії, як правило, розроблялися, для того, щоб пояснити ті явища, які вже мали місце в економічній діяльності на мікро– або макроекономічному рівнях [1, с. 10–44]. Вони використовувалися також для того, щоб прогнозувати економічну політику на майбутнє. Але відмінність теорії економіки в наш час полягає в тому, що рішення, які приймаються на її основі, необхідно негайно впроваджувати в життя, щоб домогтися позитивного ефекту. Виникає безліч проблем, що вимагають глибокого аналізу з метою прийняття оптимальних або близьких до них рішень і впровадження їх у життя у відносно короткий термін.

У сучасних умовах вимоги до ефективності функціонування підприємства не відповідають можливостям традиційного управління. Дослідження орієнтоване на створення інформаційних методів і моделей автоматизованих систем управління на базі сучасних комп'ютерних засобів дозволяє вирішувати завдання вибору управлінських рішень по окремим галузям, а також по господарству в цілому на основі порівняльного аналізу виробничих функцій. Завдання особливо актуальна, в умовах ринкової економіки та спроба вирішувати цю задачу в умовах конкуренції, безумовно, може бути використана керівником господарства. Тому проведення нових досліджень, розробка моделей, алгоритмів, методів, програм, інформаційних технологій для удосконалення функціонування підприємств є актуальною науковою задачею.

Мета статті. Головною метою цієї роботи є розробка моделей об'єктів і процесів управління – динаміки розвитку аграрного підприємства у вигляді магістралі зросту.

Виклад основного матеріалу. Виробництво – складний керований процес перетворення ресурсів в суспільний продукт. При розробці економіко-математичного апарату для аналізу, планування та прогнозування виробництва створюється система моделей, яка базується на уявленні економіки аграрного підприємств як складної ієрархічної системи [2, с. 130-134]. При математичному моделюванні взаємозв'язок між факторами виробництва і його результатом зазвичай відображають за допомогою виробничих функцій . При побудові виробничих функцій слід мати на увазі, що витрати факторів виробництва на випуск продукції завжди невід’ємні. Крім того, при моделюванні виробничих функцій треба відзначити, що відсутність одного з факторів призводить до нульового випуску продукції. Вважають також, що фактори виробництва змінюються безперервно, а випуск продукції змінюється досить гладко при зміні факторів, що природно при розгляді виробництва на макрорівні.

Економічно доцільно також, щоб при збільшенні кількості використовуваного ресурсу випуск продукції зростав, тобто для диференційованої виробничої функції можна записати наступні нерівності [3, с. 162]:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0,$$

де *K*– основні виробничі фонди; *L* – трудові ресурси.

Переліченим умовам відповідають мультиплікативні виробничі функції виду

$$X = aK^{\alpha}L^{\beta}, a > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

де *X* – випуск продукції; α,β – параметри виробничої функції.

Мультиплікативна виробнича функція дає можливість відобразити ефект масштабу виробництва, який існує тільки при одночасній зміні факторів *K* і *L*. Нехай ці фактори змінюються в λ разів,тоді

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta}F(K,L).$$

В цьому випадку:

1) якщо $\alpha+\beta>1$, то має місце інтенсивний засіб розвитку, тобто з ростом масштабу виробництва в λ разів випуск продукції зростає більш ніж в λ разів;

2) якщо $\alpha+\beta<1$, то зростання масштабу виробництва негативно позначається на випуску продукції, тобто при зростанні витрат в λ разів випуск продукції зростає менш ніж в λ разів;

3) якщо $\alpha+\beta=1$, то відбувається екстенсивне зростання економіки тільки за рахунок факторів виробництва.

Тривалі спостереження показують, що в умовах чисто екстенсивного виробництва збільшення витрат тільки одного з факторів виробництва призводить до зниження ефективності його використання, тобто $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$. Це означає, що кожна наступна одиниця зростаючого фактора з'єднується з меншою кількістю іншого фактора і його зростання дає зменшення приросту продукції.

Для екстенсивного засобу розвитку характерно $\lim\limits_{K\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty, \lim\limits_{L\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty,$ і $\lim\limits_{K\to \infty}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \lim\limits_{L\to \infty}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$.

Виробнича функція Кобба-Дугласа є моделлю екстенсивного засобу розвитку

$$X = aK^{\alpha}L^{\beta}, \alpha + \beta = 1,$$

де α – коефіцієнт еластичності випуску по виробничим фондам;

β – коефіцієнт еластичності випуску по фонду оплати праці.

Під еластичністю виробничої функції по фактору розуміється відношення відносного приросту функції до відносного приросту фактора. Еластичність чисельно дорівнює числу відсотків, на яке зміниться випуск продукції при зміні фактора на 1%. Неважко показати, що коефіцієнти еластичності можна визначити як відношення граничної ефективності функції по фактору до середньої ефективності:

$$\alpha = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \Big/ \frac{F(K,L)}{K} \text{ і } \beta = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \Big/ \frac{F(K,L)}{L}.$$

Важливою характеристикою виробничих функцій є еластичність заміни ресурсів σ, так як вона буває постійною для більшості виробничих функцій, використовуваних в економіко-математичному моделюванні. Еластичність заміни ресурсів показує, на скільки відсотків змінилася фондоозброєність $k=K/L$ при зміні граничної норми заміщення $s=dK/dL$ (граничної фондоозброєності) на 1% при незмінному випуску продукції: $\sigma = \left.\frac{d\ln k}{d\ln s}\right|_{F=const}$. Тут під граничною нормою заміщення розуміють кількість фондів, яке необхідно додатково ввести при зменшенні витрат праці на одиницю, якщо випуск продукції залишиться незмінним. Гранична норма заміщення s визначається з рівняння ізокванти (лінія рівного випуску продукції): $dy = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dL \equiv 0.$ Звідси $s = \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}}$, де $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ – гранична ефективність по праці; $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ – гранична ефективність по основним виробничим фондам.

Еластичність заміни ресурсів σ для функції Кобба-Дугласа дорівнює $\sigma = \frac{d\ln k}{d\ln s} = 1$, так як для неї гранична норма заміщення $S = \frac{1-\alpha}{\alpha}k$, де $k = K/L$. Часто економічні міркування підказують, що хоча еластичність заміщення ресурсів і можна вважати постійною, але все-таки вона відмінна від одиниці. У зв'язку з цим еластичність заміни ресурсів для функції Солоу $\sigma = \frac{d\ln k}{d\ln s} = \frac{1}{1+\rho}$.

Розглянемо економіку сільськогосподарського підприємства, що характеризується в кожен момент часу t набором змінних X, Y, C, K, L, I, де X– інтенсивність валового продукту; Y– інтенсивність кінцевого продукту; C– невиробниче споживання; I– валові капітальні вкладення; K– обсяг основних виробничих фондів; L– трудові ресурси. Ці змінні взаємопов'язані. Перш за все має місце умова балансу в кожен момент часу $X=aX+Y$, де $0<a<1$.

У свою чергу, кінцевий продукт розподіляється на валові капітальні вкладення і невиробниче споживання $Y=I+C$, де валові капітальні вкладення витрачаються на приріст основних виробничих фондів і їх відновлення за рахунок амортизаційних відрахувань: $I = \dot{K} + \mu K$, де μ – коефіцієнт амортизації. Тоді $\dot{K} = I - \mu K$ або

$$\dot{K} = (1-a)(1-u)X - \mu K \,, \tag{1}$$

де $u=C/Y$ – доля невиробничого споживання:

$$0 \le u \le 1. \tag{2}$$

Будемо вважати, що розміри валового продукту визначаються заданою виробничою функцією, що характеризує можливості виробництва в залежності від величини виробничих фондів K, трудових ресурсів і часу t, тобто

$$0 \le X \le F\,(K,L,t). \tag{3}$$

Передбачається, що виробнича функція $F(K,L,t)$ неперервна і двічі диференційована, причому виконуються наступні умови:

1) функція завжди невід’ємна: $F(K,L,t)> 0$;

2) функція зростає по кожному з аргументів $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} > 0$;

3) якщо хоча б один з ресурсів *К* або *L* дорівнює нулю, то і $F(K,L,t)=0$, $F(0,L,t)=0$, $F(K,0,t)=0$;

4) передбачається, що з ростом кожного з аргументів приріст валового продукту зменшується: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$;

5) $\lim\limits_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty$, $\lim\limits_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty$;

6) функція має властивість однорідності по аргументам *К* і *L*, тобто зміна масштабу виробництва призводить до пропорційної зміни випуску продукту: $F(\lambda K,\lambda L,t)=\lambda F(K,L,t)$. Параметр *t* вводиться в виробничу функцію, щоб врахувати цілий ряд зовнішніх факторів, що впливають на модель, в тому числі вплив науково-технічного прогресу;

7) функція зростає за часом: $\frac{\partial F}{\partial t} > 0$.

Рішення завдання будемо шукати за умови

$$K \geq K_3, \tag{4}$$

де K_3 – заданий рівень основних виробничих фондів.

Нехай задані виробничі фонди в початковий момент часу:

$$K(0)=K_0. \tag{5}$$

Допустима множина *М* в розглянутій задачі описується умовами (2)-(5). Допустимий процес представлений сукупністю функцій $v=(K(t),X(t),u(f))$, що задовольняє цим умовам. Він описує стан господарства, а *X* і *u* – управління. Очевидно, що такий процес не єдиний.

Задача управління даною економікою господарства полягає в тому, щоб знайти такий процес $v=(K(t),X(t),u(f))$, який забезпечував би найбільше середнє споживання на даному часовому інтервалі з урахуванням дисконтування споживання, тобто $f = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{C}{L} dt$.

Проведемо редукцію задачі. Для цього введемо в диференціальне рівняння (1) відносні змінні: $k=K/L$ – фондоозброєність, $c=C/L$ – середнє споживання, $x=X/L$ – продуктивність праці. Так як $K=kL$, $X=xL$, то рівняння (1) набуде вигляду $(\dot{kL}) = (1-a)(1-u)xL - \mu kL$. Враховуючи правило диференціювання складної функції, одержимо $\dot{K} = (\dot{kL}) = \dot{k}L + k\dot{L}$.

Будемо вважати, що приріст трудових ресурсів здійснюється з постійним темпом, тобто $\dot{L} = nL$. Тоді $(\dot{kL}) = (\dot{k} + kn)L$. Остаточно диференціальне рівняння зв'язку в відносних змінних набуде вигляду

$$k= (1-a)\,(1-u)\,x + (\mu + n)\,k.$$

Обмеження на управління *u* залишається, тобто

$$0 \leq u \leq f, \tag{6}$$

а на продуктивність праці *x* набуде вигляду

$$0 \leq x = f(k,t), \text{(7) де } f(k,t) = \frac{1}{L} F(K,L,T).$$

Обмеження на виробничі фонди замінимо обмеженнями на фондоозброєність:

$$k(t) \geq k_3(t), \tag{8}$$

$$k(0)=k_0. \tag{9}$$

Проведемо перетворення функціоналу до відносних змінних:

$$f = \int_0^T e^{-\delta t}(1-a)uxdt \to \max \text{ або } I = \int_0^T e^{-\delta t}(1-a)uxdt \to \min. \tag{10}$$

Потрібно визначити процес v=(k(t),u(t),x(t)), що звертає в мінімум функціонал (10) на безлічі (6)-(9).

Таким чином, у зредукованому завданні станом системи є фондоозброєність k управлінням – продуктивність праці x і частка споживання u. Рівнянням процесу служить диференціальне рівняння зростання фондоозброєності.

Для вирішення поставленого завдання скористаємося теоремою про достатні умови оптимальності. Введемо функцію R: [4,с.149]

$$R(k,x,u,t)=\frac{\partial\varphi(k,t)}{\partial k}=\left[(1-a)(1-u)x-(\mu+n)k\right]+e^{-\delta t}(1-a)ux+\frac{\partial\varphi(k.t)}{\partial t},$$

де $\varphi(k,t)$ – функція, підібрана з конкретних передумов про тип процесу і необхідного наближення.

Виділимо в R складові, що містять компоненти вектора управління (u,x), прирівняємо суму коефіцієнтів при ньому до нуля. Тим самим на φ накладається вимога -(1-a)φk+e-δt(1-a)=0; отже, φk(t,k)=e-δt. Тоді φ(t,k)=ke-t+c(t), де c(t) – довільна функція. Припустимо c(t)=0, тоді φ(t,k)=ke-δt і φ'(t,k)=-δke-δt.

При цій умові функція R не залежить від u: R(t,k,x) = e-t[(1-a)x(μ+n)k]-e-$\delta t\delta k$= =e-δt[(1-a)x-(μ+n+δ)k].Оптимальні $\bar{k}(t),\bar{x}(t)$ знайдемо з умови $\bar{k}(t)$ $x(t)\to\max\limits_{0\le x\le f(k,t)}R(t,k,x)$, так як a<1, то (1-a)>0 і, отже, max$R$ досягається при x=f(k,t).

Для одногалузевої моделі це рівняння очевидно, але в багатогалузевий моделі може виявитися, що деякі галузі недовантажені.

Проведемо тепер максимізацію R по k при оптимальному х = x̄. Позначимо: $R_1(t,k)=\max\limits_{0\le x\le f(k,t)}(t,k,x)=e^{-\delta t}\left[(1-a)f(k,t)-(\mu+n+\delta)k\right]$. Отже, максимум буде результатом максимізації R_1 по k.

Введемо r(t,k)=(l-a)f(k, t)-(μ+n+δ)k. Тоді, враховуючи, що $e^{-\delta t}$>0, можна записати $\bar{k}(t)=\arg\max r(t,k)\forall t\in[0,T]$. Проаналізуємо поведінку функції r(t,k) по k. Ця функція є сумою двох доданків: виробничої функції з точністю до постійного множника і лінійного вираження. [5, с. 64-68].

Необхідною умовою максимуму r(t,k) по k є рівність нулю частинній похідної: $\frac{\partial r(t,k)}{\partial k}=0$. З огляду на те, що f(k,t)=$be^{\rho t}k^{\alpha}$, маємо $(1-a)b\alpha e^{\rho t}k^{\alpha-1}-(\mu+n+\delta)=0$. Так як 0<$\alpha$<1 і 1-$\alpha$ = β, тоді

$$\hat{k}(t)=\left(\frac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}e^{\frac{\rho}{\beta}t}. \tag{11}$$

Знайдене $\hat{k}(t)$ назвемо магістраллю даної динамічної моделі економіки підприємства. Вона грає важливу роль в структурі оптимального рішення. Управління, що реалізує цю магістраль, знайдемо підстановкою знайденого $\hat{k}(t)$ в диференціальне рівняння розвитку системи (1): $\hat{k}(t)=(1-a)(1-u)x(t)-(\mu-n)\hat{k}(t)$. Так як $\bar{x}(t)=f(k,t)$, де f(k,t)=$be^{pt}k^{\alpha}$ є виробничою функцією, то, вирішуючи рівняння процесу щодо u, отримаємо $\hat{u}(t)=1-\frac{\dot{\hat{k}}(t)-(\mu+n)\hat{k}(t)}{(1-a)be^{\rho t}\hat{k}^{\alpha}}$. З формули (11) знайдемо $\dot{\hat{k}}(t)=\hat{k}(t)\frac{\rho}{\beta}$. Тоді $\hat{u}(t)=1-\frac{\hat{k}(t)\left(\mu+n+\frac{\rho}{\beta}\right)}{(1-a)be^{\rho t}\hat{k}^{\alpha}}$. Або $\hat{u}(t)=1-\frac{\mu+n+\frac{\rho}{\beta}}{(1-a)be^{\rho t}\hat{k}^{\alpha}}$. Так як $\hat{k}^{\alpha-1}=k^{-\beta}=\left(\frac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}\right)^{-1}e^{-\rho t}$, то отримаємо оптимальне управління

$$\hat{u}(t)=1-\alpha\frac{\mu+n+\frac{\rho}{\beta}}{\mu+n+\delta}, \tag{12}$$

в припущенні, що $0\le\hat{u}\le1$.

Розглянемо спеціальний випадок, коли крайові умови лежать на магістралі

$$k_0=\hat{k}(0),k_1=\hat{k}(T). \tag{13}$$

Тоді процес $\hat{v} = (\hat{k}, \hat{u}, f(k)) \in M$ оптимальний. Дійсно цей процес забезпечує максимум R при кожному t:

а) по u – в силу незалежності R від управління u, що досягається вибором функції $\varphi(k,t)$;

б) по k і x – з побудови.

З іншого боку ΰ представляє допустимий процес, так як:

а) задовольняє рівняння процесу (u знаходили підстановкою $\hat{k}$ в рівняння процесу);

б) $0 \le u \le 1$;

в) граничні умови були спеціально підібрані.

Відзначимо, що умови реалізованості $0 \le u \le 1$ в даній задачі виконується. Це можна перевірити. Для функції Кобба-Дугласа економічної магістраллю є крива постійного темпу зростання фондоозброєності, пропорційного темпу зростання технічного прогресу ρ, а оптимальне керування, що реалізує дану магістраль, постійна величина (12).

Таким чином, для спеціально підібраних крайових умов (13) магістраль є оптимальним режимом розвитку економіки господарства: $\hat{k}(t) = \arg\max\limits_{-\infty<k<\infty} R(t,k)$. У всіх випадках магістралі в структурі рішення відводиться суттєва роль. Насправді дуже рідко зустрічаються випадки, коли крайові умови належать магістралі. Розглянемо загальний випадок. Нехай $\overline{k}(t) = \arg\max\limits_{k \in \tilde{V}_b^t} R(t,k)$. Для вирішення цього завдання можна застосувати прийом, аналогічний вирішення завдання, лінійної щодо управління. Знайдемо У реальних економічних задачах мінімальний рівень споживання строго позитивний: $0 < u_1 \le u \le 1$.

Побудуємо границі $\gamma_{ij}(t)$, i=1,2, j=0,1, допустимої області V. Функції $\gamma_{ij}(t)$ є рішеннями диференціального рівняння процесу

$$\varphi\ \dot{k} = (1-a)(1-u)f(t,k) - (\mu+n)k \tag{14}$$

при відповідних крайових умовах (якщо j=0, то береться $k(0)=k_0$, якщо j=1, то використовується $k(T)=k_1$) і обмеженнях на керування (якщо i=1, то береться нижня межа $u=u_1$, якщо i=2, то u=1).

Розглянемо приклад, коли $k_0 < \hat{k}(0), k_1(T) > \hat{k}(T)$, тоді оптимальна траєкторія буде складатися з трьох ділянок з моментами перемикання τ_1 і $\tau 2$, де τ_1 є точкою перетину границі γ_{10} з магістраллю $\hat{k}(t)$, а τ_2 – точкою перетину магістралі $\hat{k}(t)$ з границею γ_{11}. Спочатку на тимчасовому інтервалі $(0,\tau_1)$ майже все вкладається в накопичення (споживання в цей період на мінімальному рівні u_1). Починаючи з τ_1 розвиток йде по магістралі $\hat{k}(t)$ аж до моменту τ_2, з якого знову майже все вкладається в економіку (споживання знову знаходиться на нижньому рівні u_1).

Знайдемо рішення диференціального рівняння (14). З огляду на, що $f(t)=be^{\rho t}k^{\alpha}$, отримаємо

$$\dot{k} = (1-a)(1-u)be^{\rho t}k^{\alpha} - (\mu+n)k. \tag{15}$$

Перепишемо рівняння (15) у вигляді:

$$\dot{k} + \lambda k = b(1-a)(1-u)e^{\rho t}k^{\alpha}, \tag{16}$$

де $\lambda=\mu+n$

Введемо нову змінну $z=k^{\beta}$, де β=1-α. Так як $\dot{z} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$, то маємо

$$\dot{k} = \frac{k^{\alpha}}{(1-\alpha)}\dot{z}. \tag{17}$$

Підставляючи (17) в диференціальне рівняння (16), отримуємо

$$(1-\alpha)^{-1}k^{\alpha}\dot{z} + \lambda k = b(1-a)(1-u)e^{\rho t}k^{\alpha}. \tag{18}$$

Розділивши обидві частини диференціального рівняння (18) на k^{α}, отримаємо

$$(1-\alpha)^{-1}\dot{z} + \lambda z = b(1-a)(1-u)e^{\rho t}\ . \tag{19}$$

Загальне рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального рішення однорідного диференціального рівняння z_{00} і частинного рішення неоднорідного рівняння $Z_{чн}$:$Z=Z_{00}+Z_{чн}$. Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $(1-\alpha)^{-1}\dot{z}+\lambda z=0$, характеристичним рівнянням, якого є $(1-\alpha)^{-1}q+\lambda=0$. Звідси визначимо корінь характеристичного рівняння: $q=-\lambda\beta$. Тоді загальне рішення однорідного диференціального рівняння набуде вигляду $z_{00}=C_j e^{-\lambda\beta t}$, i=0,1.

Частинне рішення неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді правої частини (19):

$$z_{чн}=Be^{\rho t}, \tag{20}$$

де B – невизначений коефіцієнт, який підлягає визначенню.

Диференціюючи (20) його по t, отримаємо $\dot{z}_{чн}=B\rho e^{\rho t}$. Підставами $z_{чн}(t)$ в рівняння (19): $(1-\alpha)^{-1}B\rho e^{\rho t}+\lambda Be^{\rho t}=b(1-a)(1-u)e^{\rho t}$. Після скорочення на $e^{\rho t}$ отримаємо $(1-\alpha)^{-1}B\rho+\lambda B=b(1-a)(1-u)$. Звідки $B=\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}$.

Тоді загальне рішення неоднорідного диференціального рівняння (19) має вигляд $z_{00}(t)=C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}$. Так як $z=\dfrac{1}{k^{\alpha-1}}=k^{\beta}$ тобто $k=z^{1/\beta}$, то загальне рішення диференціального рівняння (16) буде мати вигляд $k(t)=\left[C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}\rho t\right]^{1/\beta}$, де j = 0,1.

Визначимо умови для моментів перемикання. За визначенням, γ_{ij}, i=1, j=0,1, є границями допустимої області $\tilde{V}^t$ та виходять як частинні рішення диференціального рівняння (16) при заміні u на граничні значення u_i, i=1,2, і виборі C_j, j=0,1, в залежності від крайової умови. Тоді $\gamma_{ij}(C_j,u_j,t)=\left[C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}\right]^{1/\beta}$, де i=1,2, j=0,1.

Знайдемо інтегральні константи $C_{j,j}$=0,1, в залежності від граничних умов. Так як $k_0=k(0)=\gamma_{i0}(C_0,u,0)=\left[C_0+\dfrac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}\right]^{1/\beta}$, то $C_0=k_0-\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}$. Аналогічно визначаємо C_1 з граничної умови $k_1=k(T)=\gamma_{i1}(C_1,u_i,T)=\left[C_1 e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho T},\right]^{1/\beta}$.

Отримуючи $C_1=\left[k_1^{\beta}-\dfrac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho T}\right]e^{\lambda\beta T}$, знайдемо точки перемикання. Позначимо через τ_{ij}, i = 1,2, j = 0,1, точки перетину границь γ_{ij}, i = 1,2, j = 0,1, з магістраллю $\hat{k}(t)$. Моменти перемикання τ_{ij} отримаємо, прирівнявши $\hat{k}(t_{ij})=\lambda_{ij}(C_j,u_i,t)$, отримаємо $\left(\dfrac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}\right)^{1/\beta}e^{\frac{\rho}{\beta}t}=\left[C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}\right]^{1/\beta}$. Звідси: $\dfrac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}e^{\rho t}=C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}$.

Висновки з цього дослідження. Економічні моделі дозволяють виявити зміни зведених показників і дають цінну інформацію про темпи і пропорції розвитку господарства. В статті показана необхідність адаптації та доопрацювання моделей і методів управління аграрними підприємствами, використовуючи в якості керуючого впливу обсяг інвестицій, а також зроблено уточнення моделі запізнювання при освоєнні капітальних вкладень. Встановлено необхідність створення, на основі достатніх умов оптимальності, моделі оптимального розвитку аграрного підприємства, що дозволило розробити основну характеристику збалансованого зростання (магістраль) аграрного підприємства та розглянуто задачу оптимізації моделі з урахуванням запізнювання введення основних виробничих засобів, вибираючи в якості критерій оптимальності, загального для будь-якої економіки, максимум споживання.

Список використаних джерел:

1. Марасанов В.В., Пляшкевич О.М. Основи теорії проектування і оптимізації макроекономічних систем. Херсон, 2002. 190 с.
2. Стеценко І.В. Моделювання систем. Черкаси, 2010. 399 с.
3. Вітлінський В.В. Моделювання економіки. Київ, 2003. 408 с.
4. Лобода О.М., Кириченко Н.В. Актуальні проблеми ідентифікації та моделювання структури управління підприємством. *Наука й економіка*. 2015. № 3. С. 130–134.
5. Лобода О.М. Вирішення задачі ідентифікації структури управління підприємства. *Сучасна спеціальна техніка*. Київ, 2012. № 3. С. 64–68.
6. Лобода О.М. Побудова моделі динаміки розвитку аграрного підприємства в вигляді магістралі росту. *Економіка та суспільство*. Мукачево, 2018. Вип. 13. С. 1494–1500.

References:

1. Marasanov V.V., Pliashkevych O.M. (2002) *Osnovy teorii proektuvannia i optymizatsii makroekonomichnykh system*. Kherson: TOV «Ajlant». (in Ukrainian)
2. Stecenko I.V. (2010) *Modeljuvannja system*. Cherkasy. (in Ukrainian)
3. Vitlins'kyj V.V. (2003) *Modeliuvannia ekonomiky.* Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)
4. Loboda O.M., Kyrychenko N.V. (2015) Aktual'ni problemy identyfikatsii ta modeliuvannia struktury upravlinnia pidpryiemstvom. *Naukovo-tekhnichnyj zhurnal Khmel'nyts'koho ekonomichnoho universytetu*, vol. 3(39), pp. 130–134.
5. Loboda O.M. (2012) Vyrishennja zadachi identyfikaciji struktury upravlinnja pidpryjemstva. *Suchasna specialjna tekhnika,* vol. 3, pp. 64–68.
6. Loboda O.M. (2018) Pobudova modeli dynamiky rozvytku aghrarnogho pidpryjemstva v vyghljadi maghistrali rostu. *Ekonomika ta suspiljstvo,* vol. 13, pp. 1494–1500.