МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 62-50
DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2020.2.34

Димова Г.О.
кандидат технічних наук,
Державний вищий навчальний заклад
«Херсонський державний аграрний університет»
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5294-1756

Dymova Hanna
State Higher Educational Institution
«Kherson State Agrarian University"

ОЦІНКА СТАНІВ СИСТЕМИ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ ПРОЕКЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ ПРИ ВИХІДНИХ КООРДИНАТАХ, ЩО ЧАСТКОВО СПОСТЕРІГАЮТЬСЯ

EVALUATION OF THE SYSTEM'S CONDITIONS OF ECONOMIC DYNAMICS BY PROJECTION METHODS AT PARTIALLY OBSERVED OUTPUT COORDINATES

Задача знаходження оцінок станів систем економічної динаміки є досить поширеною при проектуванні оптимальних безперервних і дискретних систем управління при їх стохастичному та детермінованому розгляді. Розв'язання задачі при стохастичному знаходженні оцінок станів була заснована на методах факторизації кореляційних матриць повністю спостережуваних множин вихідних сигналів динамічних систем. В роботі розглядаються можливості розв'язувати окремі задачі знаходження оцінок та оптимальних управлінь методом проектування багатовимірних просторів на власні підпростори. Тут будемо розглядати їх в порядку зростаючих труднощів розв'язуваних завдань. При дослідженні систем економічної динаміки в окремих випадках всі вихідні координати системи допускають безпосереднє вимірювання і спостереження. За результатами зроблені висновки про застосування проекційних методів оцінювання станів системи економічної динаміки, коли відсутня частина вихідних сигналів.

Ключові слова: *динамічне програмування, евклідовий простір, ортогональність, матриця, визначник Грама, оптимальний закон управління.*

Задача нахождения оценок состояний систем экономической динамики является довольно распространенной при проектировании оптимальных непрерывных и дискретных систем управления при их стохастическом и детерминированном рассмотрении. Решение задачи при стохастическом нахождении оценок состояний была основана на методах факторизации корреляционных матриц полностью наблюдаемых множеств выходных сигналов динамических систем. В работе рассматриваются возможности решить отдельные задачи нахождения оценок и оптимальных управлений методом проектирования многомерных пространств на собственные подпространства. Здесь будем рассматривать их в порядке возрастающих сложностей решаемых задач. При исследовании систем экономической динамики в отдельных случаях все выходные координаты системы допускают непосредственное измерение и наблюдение. По результатам сделаны выводы о применении проекционных методов оценивания состояний системы экономической динамики в случае отсутствия части выходных сигналов.

Ключевые слова: *динамическое программирование, эвклидово пространство, ортогональность, матрица, определитель Грама, оптимальный закон управления.*

The problem of finding estimates of the state of systems of economic dynamics is quite common in the design of optimal continuous and discrete control systems in their stochastic and deterministic consideration. The solution of the problem in a stochastic sense is considered in the work "Prediction of the structure of dynamic systems". It was based on the methods of factorization of correlation matrices of completely observable sets of output signals of dynamical systems and requires a significant number of assumptions about the properties of the matrices of the system. The article discusses the possibilities to solve individual problems of finding estimates and optimal controls by the method of designing multidimensional spaces on eigensubspaces. Here we will consider the problems of finding estimates and optimal controls in order of increasing complexity of the problems being solved. In the study of systems of economic dynamics in some cases, all output coordinates of the system allow direct measurement and observation. For linear systems of economic dynamics with such properties, the formation of an optimal control law as a function of state coordinates can be performed even if there are various deviations in the measurement. However, in engineering practice very often not all state coordinates allow observation and measurement. In these cases, the optimal control law is defined as a function of part of the best estimates of the state coordinates, determined by measuring the output signals of the system. Consequently, the problem of optimal control in a more general setting includes both the problem of finding the optimal estimate of the states of the system and the problem of optimal control. Based on the results of applying projection methods for assessing the state of the system of economic dynamics, it is concluded that the task is to find estimates for a multi-step process. As a result of this, estimates are successively found for all steps, and in each subsequent step, the found optimal solutions are used in the previous step, i.e. The principle of dynamic programming is implemented. Projection research methods also allow you to simultaneously and independently solve the problem of estimating the state vectors of the system of economic dynamics and finding the optimal control sequences.

Key words: *dynamic programming, Euclidean space, orthogonality, matrix, Gram determinant, optimal control law.*

Постановка проблеми. Для лінійних систем економічної динаміки, що володіють властивостями, де всі вихідні координати системи допускають безпосереднє вимірювання і спостереження, формування оптимального закону управління як функції координат стану може здійснюватися навіть при наявності різних відхилень при вимірюванні. Однак в інженерній практиці дуже часто не всі координати стану допускають спостереження і вимірювання [2; 3]. У цих випадках оптимальний закон управління визначається як функція частини найкращих оцінок координат стану, які визначаються за вимірюваннями вихідних сигналів системи. Отже, проблема оптимального управління в більш загальній постановці включає в себе як проблему знаходження оптимальної оцінки станів системи, так і проблему оптимального управління.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язання задачі в стохастичному сенсі розглянута в роботі «Прогнозування структури динамічних систем» [1]. Вона була заснована на методах факторизації кореляційних матриць повністю спостережуваних множин вихідних сигналів динамічних систем і вимагає значного числа припущень про властивості матриць системи.

Мета статті полягає в знаходженні оптимальної оцінки станів системи економічної динаміки, коли відсутня частина вихідних сигналів, а також в розв'язанні задачі оптимального управління.

Виклад основного матеріалу. Для сучасної теорії управління при описі системи характерне використання змінних стану і застосування методів проектування, які оптимізують її рух управлінь в просторі можливих станів.

Найбільш часто при проектуванні систем управління використовуються наступні математичні методи:

– варіаційне обчислення;

– принцип максимуму;

– динамічне програмування.

У всіх випадках кінцевою метою проектування є визначення оптимального закону управління або керуючої послідовності, що доставляє максимум або мінімум заданому функціоналу, що характеризує якість системи [2].

Загальним зазначених трьох методів є використання варіаційного обчислення: перший метод має безпосереднє відношення до рівнянь Ейлера-Лагранжа, другий – до принципу Гамільтона, третій – до рівнянь Гамільтона-Якобі.

Рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dq_i}\right)-\frac{dL}{dq_i}=0\ , \tag{1}$$

де

$$L=L(\dot{q}_i,q_i)=T(\dot{q}_i,q_i)-V(q_i)\ ; \tag{2}$$

де L – лагранжиан;

q_i – узагальнені координати.

Рівняння Лагранжа виводиться з варіаційного принципу Гамільтона: будь-яка динамічна система буде рухатися під дією консервативних сил з будь-якого початкового стану таким чином, щоб мінімізувати середню за часом різницю між кінетичної $T(\dot{q}_i,q_i)$ і потенціальною $V(q_i)$ енергіями. Функцію, яка має повну енергію системи через узагальнені координати q та імпульси p, називають функцією Гамільтона

$$H(\vec{p},\vec{q})=T_p+V\ ; \tag{3}$$

та

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial q_i};\quad \frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ ; \tag{4}$$

канонічне рівняння Гамільтона.

Розглянемо в узагальненому підході розв’язання цих задач на основі методу проеціювання просторів на підпростори і оцінимо труднощі та переваги цього підходу [4].

Нехай в унітарному або евклідовому просторі R даний довільний вектор $\vec{x}$ і деякий підпростір S з базисом $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$. Вектор $\vec{x}$ можна представити (і до того ж єдиним способом) у вигляді суми

$$\vec{x}=\vec{x}_S+\vec{x}_N,\quad \vec{x}_S\in S,\quad \vec{x}_N\perp S \tag{5}$$

де $\vec{x}_S$ – ортогональна проекція вектора $\vec{x}$ на підпростір S.

Під ортогональністю $\perp$ до підпростору S розуміється ортогональність до всіх векторів з цього підпростору. Пояснимо це рисунком 1.

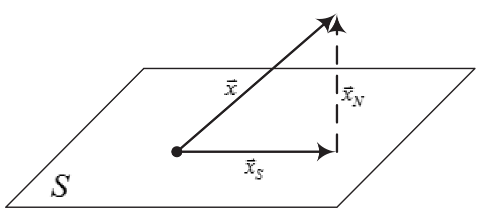

Рис. 1. Проеціювання $\vec{x}$ на підпростір S [4]

Для встановлення розкладу (5) представимо $\vec{x}_S$ в виді

$$\vec{x}_S=C_1\vec{x}_1+C_2\vec{x}_2+\ldots+C_m\vec{x}_m\ , \tag{6}$$

де C_1, C_2, …, C_m – деякі комплексні або дійсні (для евклідова простору) числа. Для рисунку 1 $m = 2$.

Для визначення цих чисел виходимо з співвідношень

$$(\vec{x}-\vec{x}_S,\vec{x}_k)=0,\quad k=1,2,\ldots,m \tag{7}$$

Підставимо в (7) замість $\vec{x}_S$ його вираз з (6)

$$\begin{cases}(\vec{x}_1\,\vec{x}_1)C_1 & + \ldots + (\vec{x}_m\,\vec{x}_1)C_m + (\vec{x}\,\vec{x}_1)\,(-1) = 0\\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ (\vec{x}_1\,\vec{x}_m)C_1 & + \ldots + (\vec{x}_m\,\vec{x}_m)C_m + (\vec{x}\,\vec{x}_m)(-1) = 0\\ \quad \vec{x}_1C_1 & + \ldots + \ \vec{x}_mC_m \quad + \quad \vec{x}_S \ \ (-1) = 0\end{cases} \tag{8}$$

Розглянемо цю систему рівностей як систему лінійних однорідних рівнянь, що мають нульовий розв'язок C_1, C_2, …, C_m, –1, прирівняємо її визначник нулю (попередньо транспонував його відносно головної діагоналі)

$$\begin{vmatrix}(\vec{x}_1\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}_1\,\vec{x}_m) & \vec{x}_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\vec{x}_m\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}_m\,\vec{x}_m) & \vec{x}_m\\ (\vec{x}\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}\,\vec{x}_m) & \vec{x}_S\end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Виділяючи з цього визначника член, що містить $\vec{x}_S$, отримаємо

$$\vec{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & & \vec{x}_1\\ & \Gamma & & \cdots\\ & & & \vec{x}_m\\ (\vec{x}\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}\,\vec{x}_m) & 0\end{vmatrix}}{\Gamma} \tag{10}$$

де $\Gamma = \Gamma(\vec{x}_1\,\vec{x}_2 \ldots \vec{x}_m)$ – визначник Грама для векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ (в силу незалежності цих векторів $\Gamma \neq 0$).

З (5)

$$\vec{x}_N = \vec{x} - \vec{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & & \vec{x}_1\\ & \Gamma & & \cdots\\ & & & \vec{x}_m\\ (\vec{x}\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}\,\vec{x}_m) & 0\end{vmatrix}}{\Gamma} \tag{11}$$

Формули (3.10) та (3.11) виражають проекцію $\vec{x}_S$ вектора $\vec{x}$ на підпростір *S*, спостережуваних на виході (вимірних на виході векторів параметрів процесу, що протікає в системі), по лінійним комбінаціям яких будемо знаходити (відновлювати) оцінки векторів простору станів системи [4].

Позначимо $\vec{y}$ – довільний вектор множини векторів в *S*, а $\vec{x}$ – довільний вектор в *R*. Якщо вектори побудувати з початку координат, то $|\vec{x} - \vec{y}|$ і $|\vec{x} - \vec{x}_S|$ будуть відповідно дорівнювати величинам похилої і висоти, проведеної з кінця вектора $\vec{x}$ до поверхні *S* (рис.1). Тому, записуючи, що висота коротше похилої, матимемо $h = |\vec{x} - \vec{x}_S| \leq |\vec{x} - \vec{y}|$ (знак рівності буде лише при $\vec{y} = \vec{x}_S$). Таким чином, серед всіх векторів $\vec{y} \in \boldsymbol{S}$ вектор $\vec{x}_S$ найменш ухиляється від заданого вектора $\vec{x} \in \boldsymbol{R}$. Величина $h = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_S)(\vec{x} - \vec{x}_S)}$ заданого вектора $\vec{x} \in \boldsymbol{R}$ є квадратичною похибкою при наближенні $\vec{x} \oplus \vec{x}_S$.

Застосуємо цей підхід до розв'язання задачі управління багатомірною системою з координатами недоступними для спостереження. У цих випадках тільки вихідні сигнали можуть бути виміряні безпосередньо.

Вимірювані координати відносять до вихідних змінних і позначають через $y_1, y_2, \ldots, y_p$, вважаючи їх компонентами вектора $\vec{y}$.

При розв'язанні задачі будемо вважати, що вихідні змінні є лінійними функціями координат стану $\vec{x}(k)$ і пов'язані з останніми лінійним перетворенням

$$\vec{y}(k) = \mathbf{M}\,\vec{x}(k)\,, \tag{12}$$

де $\vec{x}$ – n-мірний вектор;

$\vec{y}$ – p-мірний вектор;

M – матриця розміру $p \times n$ з $p \leq n$.

В тому випадку, коли розмірність вектора виходу менше вектора стану, матриця **M** є прямокутної і не має оберненої матриці. За змістом ця матриця є матрицею виходу (матрицею вимірюваних змінних) [2; 3].

При дослідженні можливості оптимального управління будемо виходити з того, що система описується векторно-матричним диференційним рівнянням [1; 2; 3].

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{m}(t) + \vec{n}(t)\,, \tag{13}$$

де $\vec{x}(t)$ – n-мірний вектор, що представляє змінні стану;

$\vec{m}(t)$ – k-мірний вектор, що представляє управляючі впливи;

$\vec{n}(t)$ – s-мірний вектор, що представляє зовнішні випадкові впливи;

$\mathbf{A}(t)$ – матриця коефіцієнтів процесів, що протікають в системі;

$\mathbf{D}(t)$ – матриця управління.

Розв'язання рівняння (13) має вигляд

$$\vec{x}(t) = \phi(t,t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\phi(t,\tau)\mathbf{D}(\tau)\vec{m}(\tau) + \vec{n}(\tau)\right]d\tau\,, \tag{14}$$

де $\varphi(t,\ t_0)$ – матриця переходу, що задовольняє однорідному диференційному рівнянню

$$\frac{d\phi(t,t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t)\phi(t,t_0) \tag{15}$$

і співвідношенню

$$\phi(t_0,t_0) = \mathbf{I}\,, \tag{16}$$

де **I** – одинична матриця.

В дискретних динамічних системах з цифровим управлінням $m(\tau) = m(kT)$ для $kT \leq \tau \leq (k+1)\ T$ розв'язання в дискретній формі дається рівнянням перехідних станів

$$\vec{x}(k+1) = \phi(k)\vec{x}(k) + G(k)\vec{m}(k) + \vec{u}(k)\,, \tag{17}$$

де

$$\phi(k) = \phi((\overline{k+1})T, kT)\,, \tag{18}$$

$$G(k) = \int_{kT}^{(k+1)T}\phi((\overline{k+1})T,\tau)\mathbf{D}(\tau)d\tau\,, \tag{19}$$

$$\vec{u}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T}\phi((k+1)T,\tau)n(\tau)d\tau\,, \tag{20}$$

Принцип побудови оптимальних управлінь системи економічної динаміки визначається також показником якості, у вимогах якого враховуються обмеження, при дотриманні яких гарантується фізична реалізація оптимального управління динамічною системою. При реалізації цифрових систем управління показник якості визначається квадратичною формою [2; 3].

$$J_N = \sum_{k=1}^{N}\left\{[\vec{x}^d(k) - \vec{x}(k)]'\mathbf{Q}(k)[\vec{x}^d(k) - \vec{x}(k)] + \lambda\vec{m}'(k-1)\mathbf{H}(k-1)\vec{m}(k-1)\right\}, \tag{21}$$

де $\vec{x}^d(k)$ – вектор бажаного стану;

Q, **H** – позитивно визначені симетричні матриці;

$$\hat{\vec{m}}^{\circ}(k/k) = \mathbf{B}(N-k)\hat{\vec{x}}(k/k)\ , \tag{22}$$

де $\mathbf{B}(N\text{-}k)$ – матриця оберненого зв'язку, елементами якої є коефіцієнти оберненого зв'язку (вона змінюється в часі, так як обчислюється на кожному кроці);

$\hat{\vec{x}}(k/j)$ – оцінка вектора стану $\vec{x}(k)$, яка використовує виміряні значення

$$\vec{y}(j), \vec{y}(j-1), \ldots, \vec{y}(0) \tag{23}$$

вектора виходу, оптимальна в тому сенсі, що очікуване середнє значення

$$E\left\{[\vec{x}(k) - \vec{\hat{x}}(k/j)]'[\vec{x}(k) - \vec{\hat{x}}(k/j)]\right\} \tag{24}$$

мінімально, де згідно формули (3.5) і рис. 1 $\vec{\hat{x}}(k/k)$ – це ортогональна проекція вектора стану на підпростір $Y(j)$. Тому

$$\vec{x}(k) = \vec{\hat{x}}(k/k) + \vec{\tilde{x}}(k/k), \tag{25}$$

$Y(j)$ є підпростором простору $\vec{X}(k)$ – простору векторів стану динамічної системи.

Згідно (3.25) вектор оптимального управління можна записати у вигляді суми його ортогональної проекції $\hat{m}^{\circ}(k/k)$ на підпростір $Y(j)$ і його нормальної компоненти $\vec{\tilde{m}}^{\circ}(k\ /\ k)$. З урахуванням формули (5) і рис. 1 за аналогією можна записати

$$\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k) + \overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}} = \mathbf{B}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k) + \mathbf{B}(N-k)\vec{\tilde{x}}(k/k). \tag{26}$$

Використовуючи основні властивості ортогональної проекції [4], знаходимо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k) &= \mathbf{B}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k) \\ \overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}}(k/k) &= \mathbf{B}(N-k)\vec{\tilde{x}}(k/k) \end{aligned} \tag{22*}$$

Ортогональна проекція $\hat{m}^{\circ}(k\ /\ k)$, яка є найкращою оцінкою для $\vec{m}^{\circ}(k)$, пов'язана лінійно з найкращою оцінкою для $\vec{x}(k)$. Нормальна компонента вектора $\overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}}(k)$ являє собою помилку оцінки Оцінка $\vec{m}^{\circ}(k)$ фізично реалізовується, так як є функцією оцінки $\vec{\hat{x}}(k/k)$, яка може бути визначена за вимірюваннями вихідних сигналів.

Покажемо тепер, що використовуючи принцип оптимальності і коли замість вектора оптимального управління $\vec{m}^{\circ}(k)$ використовується його найкраща оцінка і якість системи визначається по мінімуму середнього значення J_N вираз (22) описує оптимальний закон управління [5]. При доказі цього використовується симетричність матриць **Q** і **H** [4; 5]. Позначимо мінімум очікуваного середнього значення J_N через

$$f_N[\vec{x}(0)] = \min_{\vec{m}(j)} EI_N, \quad j = 1, 2, \ldots, N\ . \tag{27}$$

Вочевидь, що коли $\vec{m}(j) = \vec{m}^{\circ}(j)$, то $EI_N = f_N$ та $EI_N - f_N = 0$. Однак, коли $\vec{m}(k) = \vec{m}^{\circ}(k)$, то $EI_N - f_N > 0$, тобто вводиться помилка, так як за визначенням f_N є мінімумом для EI_N. Отже, задача полягає у визначенні для $\vec{m}^{\circ}(k)$ оцінки, що мінімізує помилку $EI_N - f_N$, обумовлену нереалізованістю $\vec{m}^{\circ}(k)$. Ця оцінка називається найкращою оцінкою і вона дається ортогональної проекцією $\hat{m}^{\circ}(k\ /\ k)$ і тому рівняння (22) визначає оптимальний закон управління для процесів з координатами, недоступними для вимірювання.

Висновки. Задача зводиться до знаходження оцінок для багатокрокового процесу, в результаті якого послідовно знаходяться оцінки для всіх кроків і в кожному наступному кроці використовуються знайдені оптимальні розв'язки на попередньому кроці, тобто реалізується принцип динамічного програмування [5].

Проекційні методи дослідження дозволяють одночасно і незалежно розв'язувати задачу оцінювання векторів стану системи економічної динаміки і знаходження оптимальних управляючих послідовностей.

Список використаних джерел:

1. Марасанов В.В., Забытовская О.И., Дымова А.О. Прогнозирование структуры динамических систем. *Вісник ХНТУ*. 2012. № 1(44). С. 292–302.
2. Сейдж Э.П., Уайт III Ч.С. Оптимальное управление системами. Москва : Радио и связь, 1982. 392 с.
3. Ту Ю. Современная теория управления. Москва : Машиностроение, 1971. 472 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва : ИЛ, 1960. 400 с.

References:

1. Marasanov V.V., Zabytovskaya O.I., Dymova A.O. (2012). Prognozirovaniye struktury dinamicheskikh sistem [Forecasting the structure of dynamic systems]. *Vísnik KHNTU*, № 1(44), pp. 292–302.
2. Seydzh E. P., Uayt III CH. S. (1982). Optimal'noye upravleniye sistemami [Optimal control systems]. Moskva: Radio i svyaz', 392 p.
3. Tu Yu. (1971). Sovremennaya teoriya upravleniya [Modern management theory]. Moskva: Mashinostroyeniye, 472 p.
4. Gantmakher F.R. (2004). Teoriya matrits [Matrix Theory]. Moskva: FIZMATLIT, 560 p.
5. Bellman R. (1960). Dinamicheskoye programmirovaniye [Dynamic programming]. Moskva: IL, 400 p.