# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

**УДК 519.71**
**DOI:** https://doi.org/10.32851/2708-0366/2020.1.35

***Димова Г.О.***
*кандидат технічних наук,*
*Державний вищий навчальний заклад*
*«Херсонський державний аграрний університет»*
*ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5294-1756*

***Dymova Hanna***
*State Higher Educational Institution*
*«Kherson State Agrarian University”*

## ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ МЕТОДОМ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

## RESEARCH OF DYNAMIC EQUATIONS OF INTERBRANCH BALANCE USING THE METHOD OF PERTURBATION THEORY

*Одним з ефективних методів дослідження економічної динаміки як в теоретичному, так і в прикладному аспекті є динамічні моделі витрати-випуск (моделі міжгалузевого балансу). Математичні залежності між величиною капітальних вкладень і приростом продукції є основою побудови різних варіантів динамічних моделей міжгалузевого балансу. Відмінною рисою динамічних моделей міжгалузевого балансу є виділення виробничих капіталовкладень (інвестицій) зі складу кінцевої продукції і вивчення їх впливу на зростання обсягу виробництва. В роботі складається та аналізується нелінійний варіант динамічної моделі Леонтьєва, розглядається можливість дослідження динамічних рівнянь міжгалузевого балансу при виникненні збурень в елементах матриць прямих матеріальних затрат та внутрішніх інвестицій. За результатами дослідження зроблені висновки про вплив збурень на матриці внутрішніх інвестицій і матеріальних витрат.*

***Ключові слова:*** *характеристичне рівняння, власне значення, власний вектор, матриця, збурення, збіжність степеневих рядів, евклідова норма.*

*Одним из эффективных методов исследования экономической динамики как в теоретическом, так и в прикладном аспекте являются динамические модели затраты-выпуск (модели межотраслевого баланса). Математические зависимости между величиной капитальных вложений и приростом продукции является основой построения различных вариантов динамических моделей межотраслевого баланса. Отличительной особенностью динамических моделей межотраслевого баланса является выделение производственных капиталовложений (инвестиций) из состава конечной продукции и изучения их влияния на рост объема производства. В работе составляется и анализируется нелинейный вариант динамической модели Леонтьева, рассматривается возможность исследования динамических уравнений межотраслевого баланса при возникновении возмущений в элементах матриц прямых материальных затрат и инвестиций. По результатам исследования сделаны выводы о влиянии возмущений на матрицы внутренних инвестиций и материальных затрат.*

***Ключевые слова:*** *характеристическое уравнение, собственное значение, собственный вектор, матрица, возмущения, сходимость степенных рядов, евклидова норма.*

*The economic system covers the parameters and characteristics of social production, distribution, exchange and consumption of material goods. In the economic system, the choice and formation of both the structure and the way of functioning are management tasks that ensure the dynamics of socio-economic development. In the structure of the control system, one can distinguish: the control object – the direct device, unit, subsystem of the general system, in which the goal of the functioning of the entire system is realized; management system – management body (management entity), fixing the parameters of the control object and generating control actions on the control object; feedback is an object, a subsystem, with the help of which the control system acts on a managed object. These elements together form a closed control system. Economic management tasks are poorly structured and not always a model can be constructed unambiguously. This means that the goals of the functioning of many economic systems cannot always be clearly formulated. The task of managing such a system is to make the best decision for this system. One of the effective methods for studying economic dynamics in both theoretical and applied aspects are dynamic input-output models (models of interindustry balance). Mathematical dependencies between the value of capital investments and production growth is the basis for constructing various options for dynamic models of interbranch balance. A distinctive feature of the dynamic models of the interindustry balance is the allocation of industrial investments (investments) from the composition of the final product and the study of their impact on the growth of production volume. A nonlinear version of the Leontiev dynamic model is compiled and analyzed, the possibility of studying the dynamic equations of the interindustry balance in the event of disturbances in the elements of the direct material cost and investment matrices is considered. Based on the results of the study, conclusions are drawn about the influence of disturbances on the matrix of domestic investment and material costs.*

***Key words:*** *characteristic equation, eigenvalue, eigenvector, matrix, perturbation, convergence of power series, euclidean norm.*

**Постановка проблеми.** Економічна система охоплює параметри і характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну та споживання матеріальних благ. В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є задачами управління, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку.

У структурі системи управління можна виділити: об'єкт управління – безпосереднє пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, в якій реалізується мета функціонування всієї системи; управляюча система – орган управління (суб'єкт управління), що фіксує параметри об'єкта управління і виробляє управляючі впливи на об'єкт управління; обернений зв'язок – об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізується вплив управляючої системи на керований об'єкт. Ці елементи формують в сукупності замкнуту систему управління. Необхідно дослідити рівняння економічної динаміки на стійкість методом теорії збурень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Міжгалузевий баланс служить базою визначення взаємозбалансованої системи основних показників і відображає кругообіг суспільного продукту на міжгалузевому рівні. Аналіз структурних взаємодій міжгалузевого балансу описаний математичною моделлю В. Леонтьєва (США).

**Мета статті** полягає в дослідженні динамічних рівнянь міжгалузевого балансу при виникненні збурень в елементах матриць прямих матеріальних затрат та внутрішніх інвестицій.

**Виклад основного матеріалу.** У статистичному балансі капіталовкладення відображаються загальною величиною в складі кінцевої продукції [6]. У динамічній же схемі вироблений кінцевий продукт $Y_i(t)$ в $i$-й галузі за період t ділиться на дві частини: $C_i(t)$ та $K_i(t)$, тобто

$$Y_i(t) = K_i(t) + C_i(t) \tag{1}$$

Величина $C_i(t)$ призначена для особистого і суспільного споживання, накопичення в невиробничій сфері, на експорт і т.п. Величина $K_i(t)$ йде на приріст фондів в галузях, тобто

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^{n} {}''\phi_{ij}(t)\ , \tag{2}$$

де $\Delta\phi_{ij}(t)$ – кількість продукції $i$-ої галузі, що направляється в поточному періоді в $j$-ю галузь в якості виробничих капіталовкладень (для збільшення кількості виробничого обладнання, споруд і т.п.).

Таким чином, система рівнянь виробництва і розподілу продукції за період $t$ в динамічному балансі має вигляд

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta\phi_{ij}(t) + C_i(t)\ , \quad i = \overline{1,n}.$$
$$x_{ij}(t) = a_{ij}(t)x_j(t), \quad i, j = \overline{1,n}\ , \tag{3}$$

де $a_{ij}(t)$ – коефіцієнт прямих матеріальних витрат в період t;

$C_i(t)$ – частина кінцевого продукту, що йде на споживання.

Приріст продукції $j$-й галузі за період $t$ дорівнює

$$\Delta\, x_j(t) = x_j(t) - x_j(t-1).$$

Приймемо, що приріст фондів прямо пропорційний приросту продукції, тобто

$$\Delta\phi_{ij}(t) = b_{ij}(t)\Delta x_{ij}(t)\ ,$$
$$b_{ij}(t) = \frac{\Delta\phi_{ij}(t)}{\Delta\, x_j(t)}\ , \tag{4}$$

де $b_{ij}(t)$ – коефіцієнт пропорційності, який показує скільки продукції $i$-ї галузі треба вкласти в $j$-у галузь, щоб збільшити випуск в цій галузі на одиницю (капіталомісткість одиниці випуску продукції $j$-ї галузі – коефіцієнт вкладень).

З (3) випливає

$$x_i(t) = \sum a_{ij}(t)x_j(t) + \sum b_{ij}(t)\Delta\, x_j(t) + C_i(t)\ , \tag{5}$$

Так як в безперервному випадку $\frac{d\phi_{ij}(t)}{dt} = b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt}$, то

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt} + C_i(t)\ , \quad i = \overline{1,n} \tag{6}$$

Вираз (6) – динамічна модель В. Леонтьєва [6].

Коефіцієнти $a_{ij}(t)$ утворюють матрицю прямих витрат $\mathbf{A}(t)$ розміром $(n\times n)$. Коефіцієнти $b_{ij}(t)$ утворюють матрицю $\mathbf{B}(t)$ – матрицю внутрішніх інвестицій розміром $(n\times n)$.

Ввівши вектор $\vec{C}(t)$ кінцевого продукту, що йде на споживання з точністю до структури споживання в період $t$ $\vec{C}(t) = x(t)\,\vec{d}(t)$, $\vec{d}(t)$ – вектор, що задає структуру споживання, і вектор трудомісткості продукції $\vec{l}(t) = (l_1(t), l_2(t), \ldots, l_n(t))$, $\sum_{j=1}^{n} l_j(t)x_j(t) = L(t)$ – загальна кількість трудових ресурсів, задіяних в економічній системі, отримаємо систему $(n+1)$ рівнянь

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt} + \vec{x}(t)\vec{d}(t) \tag{7}$$

$$\vec{l}(t)\vec{x}(t) = L(t)\ , \tag{8}$$

де останнє рівняння може виступати в якості обмеження по трудовим ресурсам.

Наведемо рівняння (7) в стандартній формі

$$\vec{x}(t)\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}(t) - \vec{d}(t)\right] = \mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

де $\mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{x}(t)\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}(t) - \vec{d}(t)\right]$.

Вважаючи структуру споживання постійної і позначивши $\mathbf{A}(t) - \vec{d}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)$, отримаємо

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \left[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}(t)\right]\mathbf{B}^{-1}(t)\vec{x}(t). \quad (9)$$

У моделі (9) передбачається, що приріст продукції поточного періоду обумовлюється вкладеннями, зробленими в цьому ж періоді. Хоча в реальних системах матеріального балансу є запізнювання інвестицій, амортизація основних виробничих фондів.

Розв'язанням рівняння (9) буде вектор $\vec{x}(t)$ – значення валового продукту при відомих матрицях матеріальних витрат $\mathbf{A}(t)$ і матрицях виробничих інвестицій $\mathbf{B}(t)$, які за змістом функціонування економічної системи повинні бути невід'ємно визначеними. Крім того матриця $\mathbf{A}(t)$ повинна бути нерозкладеною і продуктивною [4; 6], що еквівалентно одній з наступних вимог:

1) максимальне власне число матриці $\mathbf{A}(t)$ $\lambda(A) < 1$;

2) матриця $(\mathbf{I} - \mathbf{A}(t))^{-1}$ – позитивно визначена;

3) матричний ряд $\sum_{i=0}^{\infty} A^i(t)$ сходиться;

4)

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(t))^{-1} \quad (10)$$

Як показано в [5; 6] плавна зміна елементів матриць **A** і **B** може привести до порушення їх продуктивності, нерозкладеності і позитивної визначеності, що призведе до якісних змін розв'язань рівнянь матеріального балансу і до нестійкого функціонування економічної системи. Тому роль вироджених критичної точки гратимуть вироджені власні значення матриць $\mathbf{A}(t)$ і $\mathbf{B}(t)$ [1; 5].

Нехай зазначені матриці задовольняють умові

$$|a_{ij}| < 1, \quad |b_{ij}| < 1 \quad (11)$$

і змінилася умова внутрішніх інвестицій.

Нехай $\lambda_1$ просте власне значення матриці **A** при деякому $t$. Знайдемо відповідне власне значення

$$(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}) \quad (12)$$

Характеристичне рівняння матриці А

$$\det(»\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + C_0 = 0 \quad (13)$$

Тоді характеристичне рівняння (12) буде

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mu\mathbf{B}) = \lambda^n + C_{n-1}(\mu))\lambda^{n-1} + C_{n-2}(\mu)\lambda^{n-2} + \ldots + C_0(\mu) = 0 \quad (14)$$

де $Cr(\varepsilon)$ – поліноми степені $(n–r)$ такі, що

$$C_r(0) = C_r. \quad (15)$$

Це стає очевидним (відповідно до теорії алгебраїчних функцій), якщо запишемо точний вираз для $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mu\mathbf{B})$ [1, 2]. Можна накласти [4]:

$$C_r(\mu) = C_r + C_{r1}\mu + C_{r2}\mu^2 + \ldots + C_{r,n-r}\mu^{n-r} \quad (16)$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda 1$ простий корінь (13), то для $|\varepsilon| < 1$ існує простий корінь (14), який дається збіжним степеневим рядам

$$\lambda_1(\mu) = \lambda_1 + k_1\mu + k_2\mu^2 + \ldots \quad (17)$$

Очевидно, що $\lambda_1(\varepsilon) \to \lambda_1$ при $\varepsilon \to 0$.

Збурення елементів матриці ε визначає збурення власного значення $\lambda_1$ характеристичного полінома матриці **A**, що внаслідок безперервної залежності змін коефіцієнтів характеристичного полінома від змін елементів матриці **A**, в свою чергу, приведе до зміни власного вектора $x_1$ матриці **A**, а вона приведе до зміни напряму і величини руху економічної системи. Так як $\lambda_1$ – просте власне значення, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, то, на основі теорії лінійних рівнянь [3], в якості компонент власного вектора х можна взяти

$$(A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn}), \qquad (18)$$

де $A_{n1}$ – алгебраїчне доповнення $(n, i)$-го елемента $(A - \lambda_1 I)$, и, отже, $A_{ni}$ – це поліноми за $\lambda_1$ степенем не вище $(n - 1)$.

Застосуємо цей результат до простого власного значення $\lambda_1(\varepsilon)$ матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B})$. Введемо позначення: $\mathbf{x}_1$ – власний вектор матриці $\mathbf{A}$; $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ – власний вектор матриці $(A + \varepsilon B)$. Тоді елементи вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ – це поліноми по $\lambda_1(\varepsilon)$ та $\varepsilon$, і так як степеневий ряд для $\lambda_1(\varepsilon)$ збігається при заданих ε, то кожний елемент $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ представимо збіжним степеневим рядом по $\varepsilon$, постійний член в якому – це відповідний елемент вектора $\mathbf{x}_1$. Звідси

$$\mathbf{x}_1(\mu) = x_1 + \mu z_1 + \mu^2 z_2 + \dots \qquad (19)$$

де кожна компонента векторного ряду (19) в правій частині – збіжний степеневий ряд по $\varepsilon$.

Аналогічно результату (17) для власного значення, отримуємо результат для власного вектора.

Розглянемо більш складний випадок: матриця **A** має елементарні дільники. В цьому випадку існує система правих і лівих власних векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ та $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ таких, що

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j = 0 \quad (i \neq j), \qquad (20)$$

хоча ці вектори єдині, якщо всі власні значення прості [1, 2, 3].

Виразимр кожний вектор $\mathbf{z}_i$ в (19) через $\mathbf{x}_j$ у виді

$$\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \mathbf{x}_j, \qquad (21)$$

Тоді маємо

$$\mathbf{x}_1(\mu) = \mathbf{x}_1 + \mu \sum_{j=1}^{n} S_{j1} \mathbf{x}_j + \mu^2 \sum_{j=1}^{n} S_{j2} \mathbf{x}_j + \dots, \qquad (22)$$

і, збираючи разом члени з $\mathbf{x}j$, отримаємо

$$\mathbf{x}_1(\mu) = (1 + \mu S_{11} + \mu^2 S_{12} + \dots)\mathbf{x}_1 + (\mu S_{21} + \mu^2 S_{22} + \dots)\mathbf{x}_2 + \dots + \\ + (\mu S_{n1} + \mu^2 S_{n2} + \dots)\mathbf{x}_n \qquad (23)$$

Збіжність $n$ степеневих рядів, що стоять в дужках, є простий наслідок абсолютної збіжності рядів (19).

Отримаємо точне значення виразу для збурення першого порядку в термінах правих і лівих власних векторів (20). Позначимо

$$S_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j, \ \ i = \overline{1, n} \qquad (24)$$

де $\mathbf{y}_j$ та $\mathbf{x}_j$ – нормовані ліві та праві власні вектори.

Якщо $\mathbf{y}_j$ і $\mathbf{x}_j$ дійсні, то $S_i$ є косинус кута між цими векторами [2, 3]. В будь-якому випадку $|S_i| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j| \leq \|\mathbf{y}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_j\|_2 = 1$, де $\|\mathbf{y}_i\|_2$, $\|\mathbf{x}_j\|_2$ – евклідові норми векторів.

Для нормованих векторів формула (23) буде мати вигляд:

$$\mathbf{x}_1(\mu) = x_1 + (\mu t_{21} + \mu^2 t_{22} + \dots)\mathbf{x}_2 + \dots + (\mu t_{n1} + \mu^2 t_{n2} + \dots)\mathbf{x}_n. \qquad (25)$$

Визначимо величину

$$\beta_{ij} = \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j \qquad (26)$$

$$|\beta_{ij}| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j| \leq \|\mathbf{B}\|_2 \|\mathbf{y}_i\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2 \qquad (27)$$

За визначенням

$$(\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{x}_1(\mu) = \lambda_1(\mu)\mathbf{x}_1(\mu) \qquad (28)$$

і так як λ1(ε) і всі компоненти вектора x1(ε) представляються збіжними степеневими рядами, можна прирівняти члени при однакових степенях ε в цьому рівнянні та використовуючи (17) та (27), отримаємо

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=2}^{n} t_{i1}\mathbf{x}_i\right) + \mathbf{B}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \left(\sum_{i=2}^{n} t_{i1}\mathbf{x}_i\right) + k_1\mathbf{x}_1 \qquad (29)$$

або

$$\sum_{i=2}^{n}(\lambda_i - \lambda_1)t_{i1}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{x}_1 = k_1\mathbf{x}_1 \tag{30}$$

Помноживши зліва на $\mathbf{Y}_1^T$ і з урахуванням, що $\mathbf{Y}_1^T\mathbf{x}_i = 0 \quad (i \neq 1)$, отримаємо

$$k_1 = \frac{\mathbf{Y}_1^T\mathbf{B}\mathbf{x}_1}{\mathbf{Y}_1^T\mathbf{x}_1} = \frac{\beta_{11}}{S_1} \tag{31}$$

і, отже,

$$|k_1| \leq \frac{n}{|S_1|} \tag{32}$$

Перемножуючи (30) зліва на $\mathbf{Y}_i^T$, отримаємо

$$(\lambda_i - \lambda_1)t_{i1}S_i + \beta_{i1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \tag{33}$$

і, отже, з (25) випливає, що член першого порядку в збуренні $\mathbf{x}_1$ має вигляд

$$\mu\left[\frac{{}^{2}{}_{21}x_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)S_2} + \frac{{}^{2}{}_{31}x_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)S_3} + \dots + \frac{{}^{2}{}_{n1}x_n}{(\lambda_1 - \lambda_n)S_n}\right] = \mu\sum_{i=2}^{n}\frac{{}^{2}{}_{i1}}{S_i(\lambda_1 - \lambda_i)}x_i \tag{34}$$

Розглядаючи власні вектори, розкладаємо їх збурення на компоненти в напрямках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Коли хі ортогональні, (це має місце коли маємо n елементарних дільників), то можна оцінити відхилення економічної системи при заданих збуреннях ε. В якості $\varepsilon$ можна взяти коефіцієнти інфляції. При великих значеннях косинуса кута між векторами $\mathbf{x}_i^T(\mu)$, $\mathbf{x}_i$ складові векторів практично збігаються і система стійка до збурень. Випадок кратних власних значень і нелінійних дільників матриць **А** та **В** може бути досліджений з переходом до канонічних форм Жордана і використанням теорем Гершгоріна [1; 2; 4].

**Висновки.**

1. При простому власному значенні матриці матеріальних витрат А дослідження впливу збурень на матриці внутрішніх інвестицій **В** і матеріальних витрат **А** може бути зведено до знаходження косинуса кута між векторами $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$.
2. При наявності *n* елементарних дільників матриці **А** дослідження впливу збурення ε може бути зведено до знаходження косинусів кутів між власними векторами, що відповідають різним власним значенням. Малі значення косинусів між $x_i(\varepsilon)$ та $x_i$ означатиме значний дрейф економічної системи під дією інфляції.
3. Випадок кратних власних значень і нелінійних дільників вимагає більш складного дослідження із залученням крім теорії збурень і алгебраїчних функцій математичного апарату канонічних форм Жордана [1].

## Список використаних джерел:


1. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров. *Успехи математических наук*. 1971. Т. XXVI, № 2(158). С. 101-114.
2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. Москва : Наука, 1976. 649 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц. Москва : Наука, 1978. 280 с.
5. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1. Москва : Мир, 1981. 344 с.
6. Основы теории оптимального управления. В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лагоша / Ред. В.Ф. Кротова. Москва : Мир, 1990. 430 с.


## References:


1. Arnol'd V.I. (1971). O matritsakh, zavisyashchikh ot parametrov [About Matrices Depending on Parameters]. Uspekhi matematicheskikh nauk. T. XXVI, № 2(158), pp. 101-114.
2. Van der Varden B.L. Algebra (1976). [Algebra]. Moskva: Nauka, 649 p.
3. Gantmakher F.R. (2004). Teoriya matrits. [Matrix Theory]. Moskva: FIZMATLIT, 560 p.
4. Lankaster P. (1978). Teoriya matrits. [Matrix Theory]. Moskva: Nauka, 280 p.
5. Gilmor R. (1981). Prikladnaya teoriya katastrof [Applied Catastrophe Theory]. T. 1. Moskva: Mir, 344 p.
6. Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya (1990) [Fundamentals of the Theory of Optimal Control]. V.F. Krotov, B.A. Lagosha, S.M. Lagosha / Red. V.F. Krotova. Moskva: Mir, 430 p.