МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.86
DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2021.10.18

Білоусова Т.П.
старший викладач,
Херсонський державний аграрно-економічний університет
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6982-8960

Bilousova Tetiana
Kherson State Agrarian and Economic University

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РИНКУ БАГАТЬОХ ТОВАРІВ

MATHEMATICAL MODEL OF THE OPTIMAL MARKET OF MANY GOODS

Розглянуто нелінійну динамічну математичну модель вільного ринку багатьох товарів. У розглянутій моделі інерційного ринку з фіксованою лінією попиту передбачається, що обсяг продажів кожного товару на кожному інтервалі дискретного часу визначається мінімальною з двох величин: обсягу товару, що поставляється на ринок, та обсягу попиту. При цьому виділяються три зони обсягів постачання: зона дефіциту товару, зона затоварювання ринку та зона динамічної рівноваги ринку. Для кожної із зон проведено детальний аналіз щодо поведінки функцій попиту та пропозиції. Оскільки обсяги продажів залежать від ціни товару та співвідношення попиту та пропозиції, для кожної зони знаходяться свої умовно-оптимальні ціни товару, що залежать від рівня пропозиції в кожній зоні і забезпечують максимум прибутку продавця за кожного фіксованого обсягу пропозиції товару.

Ключові слова: *математична модель, функція попиту, функція пропозиції, рівновага, умовно-оптимальна ціна, умовно-максимальний прибуток.*

Рассмотрена нелинейная динамическая математическая модель свободного рынка для многих товаров. В рассматриваемой модели инерционного рынка с фиксированной линией спроса предполагается, что объем продаж каждого товара на промежутке дискретного времени определяется минимальной из двух величин: объемом поставляемого на рынок товара и объемом спроса. При этом выделяются три зоны объемов снабжения: зона дефицита товара, зона затоваривания рынка и зона динамического равновесия рынка. Для каждой из зон проведен детальный анализ поведения функций спроса и предложения. Так как объемы продаж зависят от цены товара и соотношения спроса и предложения, то для каждой зоны находятся свои условно-оптимальные цены товара, которые зависят от уровня предложения в каждой зоне и обеспечивают максимум прибыли продавца при каждом фиксированном объеме предложения товара.

Ключевые слова: *математическая модель, функция спроса, функция предложения, равновесие, условно-оптимальная цена, условно-максимальная прибыль.*

A nonlinear dynamic mathematical model of the free market for many goods is considered. In the considered model of the inertial market of both one and many goods with a fixed demand line, it is assumed that the sales volume of each product at each step (interval) of discrete time is determined by the minimum of two quantities: the volume of goods supplied to the market (supply of goods) and the volume of demand. At the same time, there are 3 zones of supply volumes: a zone of shortage of goods, a zone of market overstocking and a zone of dynamic market equilibrium. In the first zone, demand exceeds supply, so that the seller receives less profit. For each of the zones, *a detailed analysis of the behavior of the supply and demand functions was carried out. Since the sales volumes depend on the price of the goods and the ratio of supply and demand, each zone has its own conditionally optimal prices of the goods, which depend on the level of supply in each zone, and ensure the maximum profit of the seller for each fixed volume of supply of the goods. It is shown that the state of the market for many (n> 1) goods is characterized by the indicated three possible zones for each of the goods, which leads to 3n possible zones of the market state. Due to the constraints of the type of inequalities inherent in the considered mathematical model of the market, the target function of the market (the total profit of the seller) is a piecewise differentiable function of the vectors of prices and offers of goods with discontinuities in the gradient of this functions on the lines of equality of supply and demand, that is, on the division lines of zones 1 and 2 (in zone 3), which makes it difficult to solve the problem of vector optimization of this function. It is not possible to construct an analytical solution to the problem for each of the 3n zones. In this regard, an original approach to a unified representation of an objective piecewise differentiable function through a system of indicator matrix predicate functions is proposed, which made it possible to represent the objective function of many variables as conditionally smooth, everywhere differentiable for hypothetical values of predicate functions, and obtain an analytical solution to the problem of multidimensional optimization.*

Key words: *mathematical model, demand function, supply function, equilibrium, conditionally optimal price, cconditionally maximum profit.*

Постановка проблеми. Використання математичного моделювання в економіці дає змогу зробити більш глибоким кількісний економічний аналіз, розширити сферу економічної інформації, зробити більш ефективними економічні розрахунки. Математична модель відрізняється за своєю природою від оригіналу, але дослідження властивостей оригіналу за допомогою математичної моделі зручніше, є більш дешевим та займає менше часу. Застосування методу математичного моделювання в економіці – це об'єктивний етап її розвитку, пов'язаний з існуванням стійких кількісних закономірностей і можливістю формалізованого опису багатьох, хоча і далеко не всіх, економічних процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Побудови моделі ринку, моделювання та прогнозування його розвитку є однією з найважливіших проблем економіки. Більшість моделей ринку будувалася за принципом установлення конкурентної рівноваги, про існування якої було заявлено в роботі Вальраса [1]. Математичне обґрунтування гіпотези Вальраса було виконано в 1950-х роках у роботах Ерроу-Дебре [2], Маккензі, Гейла, Никайдо. У подальшому велися роботи з удосконалення моделей та їх узагальнення у монографіях Морішіми, Никайдо, Ланкастера та інших сучасних авторів [3; 4]. Ці моделі ринку встановлювали баланс між пропозицією та попитом, але не могли бути моделлю ринку, оскільки в них, по-перше, була відсутня конкуренція як між виробниками, так і між споживачами, а по-друге, не відображено цілеспрямованість дій учасників ринку (виробників та споживачів), яка й є основою конкуренції [5–7]. Нерівновага характеризує ринок, що не перебуває у рівновазі [8]. Порушення рівноваги може відбуватися дуже короткочасно або протягом тривалого періоду часу.

Формулювання цілей статті. Модель ринку відображає баланс між пропозицією та попитом з урахуванням кожного учасника ринку. Побудовано математичну модель, яка поряд із балансом відображає цілеспрямованість кожного учасника ринку. Ця модель є векторною (багатокритеріальною) задачею математичного програмування [3]. Для вирішення цього завдання розроблено методи рішення векторної задачі, засновані на нормалізації критеріїв та принципі гарантованого результату [9; 10]. На конкурентному ринку, на якому є велика кількість покупців і продавців, за допомогою методу перебору визначаємо рівноважну ціну, виключаючи ціни, за яких формується надлишок або нестача продукту. Так, за високої ціни виробники бажають виробляти велику кількість продукту, але покупці готові придбати тільки малу кількість продукту, виникає перевиробництво. За малої ціни покупці готові придбати велику кількість продукту, але виробники готові виробляти малу кількість товару, виникає дефіцит товару і послуги. За якоїсь середньої ціни, рівноважної ціни виробники готові виробляти рівно стільки, скільки споживачі бажають і в змозі придбати. На ринку не виникає надлишок, за якого ринок штовхав би ціну на продукт вниз, не виникає і браку продукту, за якого ринок не викликає підвищення ціни на продукт. За такої рівноважної ціни величини попиту та пропозиції врівноважуються. Розглянемо поведінку математичної моделі [9] для ринку багатьох товарів.

Виклад основного матеріалу. *Загальний випадок: ринок багатьох товарів (n> 1).* Усі змінні стану ринку багатьох товарів є n-вектор-стовпцями. [9]. У випадку одного товару [10] прибуток продавця J(t) є безперервною кусочно-диференційованою (кусочно-гладкою) функцією P(t) і Q(t) з розривом частинних похідних P(t) і Q(t) на межі розділу зон 1 і 2 стану ринку. У силу обмежень типу нерівностей цільова функція (сумарний прибуток продавця в момент часу t) у разі багатьох товарів також, очевидно, має стрибки градієнтів по P(t) і Q(t) на межах розділу зон дефіциту та затоварювання ринку за кожним із товарів, тобто є кусочно-гладкою. Провести дослідження 3^n зон стану багатьох (n) товарів так, як для ринка одного товару [10], неможливо. Однак шляхом певного перетворення (уніфікованого індикаторного подання) кусочно-диференційованої за багатьма змінними цільової функції це зробити вдається.

Уніфіковане індикаторне подання цільової функції ринку. Гіпотетичний прибуток продавця. Для уніфікації подання цільової функції у разі багатьох ($n>1$) товарів запровадимо індикаторні діагональні булеви $n\times n$ – матриці-предикати $C^{(k)}(t)$, де $k=1,2,3$ – номери зон. Діагональні елементи цих матриць указують на гіпотетичний стан ринку по кожному товару ($C_{ii}^{(k)}(t)=1$ – присутність у t-й момент часу i-го товару в k-й зоні, $C_{ii}^{(k)}(t)=0$ – відсутність). Кожен товар не може бути одночасно більше ніж в одній зоні стану ринку. Тому в кожному рядку $n\times 3$ – матриці C(t), складеної з n-векторів-стовпців діагональних елементів матриць $C^{(1)}(t), C^{(2)}(t), C^{(3)}(t)$, так що $C_{ik}(t)=C_{ii}^{(k)}(t)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,3}$ може бути одна і лише одна одиниця (інші два елементи рядка дорівнюють нулю). Кожній такій матриці відповідає своє розташування (розміщення з повтореннями) трьох елементів (зон станів товару) по n товарам. Усього таких різних розстановок 3^n. Це і є кількість можливих розстановок зон станів по всіх товарах у кожний момент дискретного часу. Цільова функція J(t) набуває тоді вигляду гладкої (неперервної і диференційованої по P(t) і Q(t)) квадратичної по P(t) і лінійної по Q(t) форми з гіпотетичними матрицями-предикатами $C^{(k)}(t)$:

$$J(t)=Q^T(t)C^{(1)}(t)P(t)+\left(Q_m-AP(t)\right)^T\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)P(t)-Q^T(t)P_1+Q^{oT}(t)\left(P_1-P_2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(P(t)-P(t-1)\right)^T R\left(P(t)-P(t-1)\right)\Rightarrow \max_{P(t),Q(t)} \qquad (1)$$

Умовно-оптимальні ціни та оптимальна пропозиція товарів. Досліджуємо поведінку гіпотетичного (за фіксованої матриці C(t)) прибутку продавця (1) . Обчислимо градієнт $\nabla_P J(t)$ та гесіан $\nabla_P^2 J(t)$ цієї функції за фіксованого Q(t) з урахуванням симетрії діагональних матриць $C^{(k)}(t)$:

$$\nabla_P J(t)=\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)}=C^{(1)}(t)Q(t)-A^T\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)P(t)+$$

$$+\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)\left(Q_m-AP(t)\right)-R\left(P(t)-P(t-1)\right),$$

$$\nabla_P^2 J(t)=\frac{\partial^2 J(t)}{\partial P(t)^2}=-A^T\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)-\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)A-R.$$

Якщо в зонах 1 та 2 гесіан $\nabla_P^2 J(t)$ цільової функції J(t) – невід’ємно визначена матриця (а необхідною і достатньою умовою цього є, як відомо, невід’ємність усіх головних мінорів матриці $\nabla_P^2 J(t)$, що визначає обмеження на елементи матриці A), то у цих зонах J(t) увігнута P(t) і досягає максимуму P(t) за фіксованого Q(t). Необхідною умовою максимуму є рівність нулю градієнта: $\partial J(t)/\partial P(t)=0$. Остання рівність – рівняння для P(t) у зонах 1 і 2. У зоні 3 маємо баланс попиту та пропозиції товарів: $Q^d(t)=Q(t)$, тобто з урахуванням (1) [9] рівняння $Q_m - AP(t)=Q(t)$ для P(t). Поєднуючи логічно рівняння для всіх зон, отримуємо систему: $\left(C^{(1)}(t)+C^{(2)}(t)\right)\nabla_P J(t)+C^{(3)}(t)\left(Q_m - AP(t)-Q(t)\right)=0$. Вирішуючи цю систему щодо P(t), знаходимо:

$$P(t)=\alpha(t)+\beta(t)Q(t),$$

$$\alpha(t)=\left(C^{(1)}(t)+C^{(2)}(t)\right)\left\{\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)\left(A+A^T\right)+R\right\}^{-1}. \tag{2}$$

$$\left[\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)Q_m+RP(t-1)\right]+C^{(3)}(t)A^{-1}Q_m, \tag{3}$$

$$\beta(t)=\left(C^{(1)}(t)+C^{(2)}(t)\right)\left\{\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)\left(A+A^T\right)+R\right\}^{-1}C^{(1)}(t)-C^{(3)}(t)A^{-1}. \tag{4}$$

Неважко побачити, що у випадку одного товару [10], коли n = 1, $C^{(k)}(t)$ - скаляри, за $C^{(1)}(t)=1$ $\left(C^{(2)}(t)=C^{(3)}(t)=0\right)$ отримуємо формулу (3) [10] для P(t) 1-ї зони, за $C^{(2)}(t)=1$ $\left(C^{(1)}(t)=C^{(3)}(t)=0\right)$ – формулу (6) [10] для 2-ї зони, за $C^{(3)}(t)=1$ $\left(C^{(1)}(t)=C^{(2)}(t)=0\right)$ – формулу (8) [10] для 3-ї зони. Для ринку багатьох товарів, підставляючи вираз (2) для P(Q) у вираз (1) для J, отримуємо умовно-квадратичну залежність J(Q). Максимізуючи J за Q, знаходимо оптимальну пропозицію товарів (позначимо її через $\widehat{Q}(t)$):

$$\widehat{Q}(t)=V^{-1}(t)u(t), \tag{5}$$

$$u(t)=C^{(1)}(t)\alpha(t)-\beta^T(t)A^T\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)\alpha(t)+\beta^T(t)\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)\left(Q_m-A\alpha(t)\right)-$$
$$-\beta^T(t)R\left(\alpha(t)-P(t-1)\right)-P_1, \tag{6}$$

$$V(t)=-C^{(1)}(t)\beta(t)-\beta^T(t)C^{(1)}(t)+\beta^T(t)A^T\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)\beta(t)+$$
$$+\beta^T(t)\left(C^{(2)}(t)+C^{(3)}(t)\right)A\beta(t)+\beta^T(t)R\beta(t). \tag{7}$$

Оптимальне замовлення товарів та алгоритм виділення рішення. Пропозиція товарів в обсязі $\widehat{Q}(t)$, однак, не завжди досяжна, оскільки пропозиція товарів на ринку складається із залишків $Q^o(t)$ товарів, не проданих на попередньому інтервалі часу, та обсягів $Q^z(t)$ товарів, що надішли додатково до ринку від замовлення, зробленого τ кроками раніше (у момент $t-\tau$). Очевидно, якщо обсяг $Q_j^o(t)$ залишків деякого j-го товару перевищує відповідну компоненту вектора $\widehat{Q}_j(t)$, то навіть без додаткових поставок ($Q_j^z(t)=0$) цього товару на ринок обсяг $Q_j(t)$ його поставки в момент t перевищуватиме величину $\widehat{Q}_j(t)$, і ринок стане затовареним по цьому товару. Умова досягнення максимуму прибутку не може бути при цьому виконана. З іншого боку, якщо обсяг $Q_j^o(t)$ залишків деякого j-го товару менше відповідної компоненти вектора $\widehat{Q}_j(t)$, то за допомогою додаткового постачання цього товару в обсязі $Q_j^z(t)=\widehat{Q}_j(t)-Q_j^o(t)$ можна ліквідувати дефіцит цього товару, забезпечити оптимальне постачання товару на ринок та максимум прибутку продавця. Отже, оптимальна стратегія замовлень товарів для їх постачання на ринок повинна полягати в тому, щоб, розрахувавши в момент часу $t-\tau$ прогнозований на момент часу t стан оптимального ринку, отримати оптимальне значення $\widehat{Q}(t)$ вектора бажаної поставки товарів на ринок та замовити в момент часу $t-\tau$ додаткову кількість кожного j-го товару, що дорівнює різниці $\widehat{Q}_j(t)-Q_j^o(t)$, якщо прогнозується $Q_j^o(t)<\widehat{Q}_j(t)$, і не замовляти додатково j-й товар, якщо прогнозується зворотне:

$$Q_j^z(t)=\begin{cases}\widehat{Q}_j(t)-Q_j^o(t), \text{якщо} Q_j^o(t)<\widehat{Q}_j(t), \\ 0, \text{якщо} Q_j^o(t)\geq\widehat{Q}_j(t),\end{cases} \quad j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Коротко це можна записати у вигляді: $Q^z(t)=\max\left(\widehat{Q}(t)-Q^o(t),0\right)$, де $\left(\widehat{Q}(t)-Q^o(t),0\right)$ розуміється як вектор, складений із максимальних значень компонентів вектора $\widehat{Q}(t)-Q^o(t)$ та нуль-вектора. Оскільки на кожному кроці дискретного часу t може мати місце лише одне розташування товарів по зонах і вона невідома, доводиться шукати 3^n розв'язків задачі оптимізації, що відповідають 3^n гіпотетичним значенням матричного предикату C. Для кожного рішення знаходиться фактичне значення S цього матричного предикату, що розраховується за отриманими значеннями векторів цін товарів, обсягів залишків, оптимальних допустимих додаткових замовлень, попиту та пропозиції. Критерієм відбору правильного рішення є збіг фактичного та гіпотетичного предикатів. Алгоритм такого перебору та порівняння побудований та реалізований у цій роботі.

Асимптотично оптимальний рівноважний стан ринку (точка спокою). В умовах динамічної рівноваги ринку попит $Q^d(t)=Q_m-AP(t)$ на всі товари дорівнює рівню $\widehat{Q}(t)$ їх постачання ринку, тобто всі товари перебувають у зонах 3. Тоді, навіть якщо на ринку можуть залишатися непродані товари в обсягах $Q^o(t)$, що не перевищують оптимальні значення $\widehat{Q}(t)$, додаткові замовлення в обсягах $Q^z(t)=Q(t)-Q^o(t)$ повністю забезпечать попит та максимум прибутку продавця. Дійсно, якщо всі товари знаходяться у зоні 3, то пропозиція дорівнює попиту, обсягу продажу та сумі обсягів замовлення та залишків товарів, унаслідок чого маємо:

$$J(t)=\left(Q_m-AP(t)\right)^T\left(P(t)-P_1\right)+Q^{oT}(t)\left(P_1-P_2\right)-\frac{1}{2}\left(P(t)-P(t-1)\right)^T R\left(P(t)-P(t-1)\right).$$

Знайдемо градієнт та гесіан цієї функції по P(t):

$$\frac{dJ(t)}{dP(t)}=-A^T\left(P(t)-P_1\right)+\left(Q_m-AP(t)\right)-R\left(P(t)-P(t-1)\right).\quad \frac{d^2J(t)}{dP^2(t)}=-\left(A+A^T+R\right).$$

Максимум J(t) по P(t) досягається за рівності нулю градієнта та від'ємної визначеності матриці-гесіана, звідки за додатної визначеності матриці $\left(A+A^T+R\right)$. отримуємо оптимальне значення вектора цін:

$$\widehat{P}(t)=\left(A+A^T+R\right)^{-1}\left(Q_m+A^TP_1+RP(t-1)\right).$$

Для додатної визначеності матриці $\left(A+A^T+R\right)$. необхідно та достатньо додатковості всіх діагональних мінорів цієї матриці. Цим умовам має підпорядковуватися матриця A. Отриманий результат можна сформулювати у такому вигляді: *у разі справедливості співвідношень (1)–(7) в* [9] *і додатної визначеності матриці* $\left(A+A^T+R\right)$. *максимальний прибуток продавця на ринку багатьох товарів на кожному інтервалі дискретного часу t досягається за умови рівності і лише рівності попиту та пропозиції* $Q^d(t)=Q_m-AP(t)=Q(t)$ *у точці*

$$\widehat{P}(t)=\left(A+A^T+R\right)^{-1}\left(Q_m+A^TP_1+RP(t-1)\right).,$$

$$\widehat{Q}(t)=Q_m-A\left(A+A^T+R\right)^{-1}\left(Q_m+A^TP_1+RP(t-1)\right),$$

де P_1 *– вектор закупівельних цін товарів,* $P(t-1)$ *– вектор цін товарів у попередньому періоді,* $\widehat{Q}(t)$ *– вектор оптимальних обсягів поставки товарів на ринок у момент часу t,* $\widehat{P}(t)$ *– вектор оптимальних цін товарів у цей момент часу.* Наслідком цього є рекурентне співвідношення, що визначає динаміку вектора оптимальних цін товарів у разі, коли попереднє значення вектора цін теж оптимальне $\left(P(t-1)=\widehat{P}(t-1)\right)$:

$$\widehat{\mathrm{P}}(t+1)=\left(A+A^T+R\right)^{-1}\left(R\widehat{P}(t)+\left(Q_m+A^TP_1\right)\right),\widehat{P}(0)=P_0 \tag{9}$$

Це рівняння справедливе за умови, що обсяги залишків непроданого товару не перевищують величини оптимального постачання товарів ринок. Послідовність векторів оптимальних цін $\left\{\widehat{P}(t)\right\}$ при $t\to\infty$ прямує до скінченної границі

$$P^* = \left(A + A^T\right)^{-1}\left(Q_m + A^T P_1\right), \qquad (10)$$

що є асимптотично рівноважним значенням вектора цін (станом спокою ринку). Ця величина відразу знаходиться з (9), оскільки за $t \to \infty$ та $\widehat{P}(t+1) \to P^*$ та $\widehat{P}(t) \to P^*$, так що в стані асимптотичної рівноваги рівняння (9) набуває вигляду $\left(A + A^T + R\right).P^* = RP^* + \left(Q_m + AP_1\right)$, звідки і слідує значення P^*, представлене в (10). Відповідне йому асимптотично рівноважне значення рівня постачання товарів на ринок точно збігається з величиною купівельного попиту на товари за оптимальними цінами P^*:

$$Q^* = Q_m - AP^* = A^T\left(A + A^T\right)^{-1} Q_m - A\left(A + A^T\right)^{-1} A^T P_1. \qquad (11)$$

Якщо будь-яка компонента вектора Q^* стає від'ємною, вона дорівнює нулю:

$$Q_i^* = \begin{cases} Q_{mi} - \left(AP^*\right)_i, \text{якщо} \mathrm{Q_{mi}} - \left(AP^*\right)_i > 0, \\ 0, \text{якщо} \mathrm{Q_{mi}} - \left(AP^*\right)_i \le 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}. \qquad (12)$$

Це означає, що деякі товари на рівноважному ринку можуть не користуватися попитом та не постачаються на ринок. Рішення векторного різницевого рівняння (9) являє собою векторну експоненту, що затухає: $\widehat{P}(t) = \alpha^t\left(P_0 - P^*\right) + P^* = \exp(-\beta t)\left(P_0 - P^*\right) + P^*$, де $\alpha = \left(A + A^T + R\right)^{-1} R$, $\beta = \left|\ln\left(A + A^T + R\right)^{-1} R\right|$. За $\mathrm{P}_0 \ne P^*$ вектор оптимальних цін поступово наближається до асимптотично рівноважного значення. За $\mathrm{P}_0 = P^*$ одразу маємо асимптотично рівноважний вектор цін: $\widehat{P}(t) \equiv P^*$. У міру наближення вектора цін товарів до асимптотично рівноважного значення P^* прибуток продавця наближається до свого асимптотично рівноважного значення. Якщо за асимптотичної рівноваги ринку $Q^0 < Q^*$, то асимптотично рівноважний прибуток дорівнює $J^* = Q^*\left(P^* - P_1\right) + Q^0\left(P_1 - P_2\right)$.

Імітаційне моделювання перехідних процесів на ринку. Проведемо імітаційне моделювання функціонування ринку багатьох товарів у часі та дослідимо траєкторії переходу ринку до оптимального стану асимптотичної рівноваги після виведення його зі стану рівноваги. Нехай до деякого початкового моменту часу $t = 0$ протягом інтервалу часу $t = \overline{-\tau, -1}$, де τ – лаг (затримка) постачання товарів на ринок, ринок багатьох товарів перебував у стані рівноваги, за якого, згідно з (10), $P(t) = P^*\left(A + A^T\right)^{-1}\left(Q_m + A^T P_1\right)$, $Q(t) = Q^* = Q_m - AP^*$. На цьому інтервалі часу маємо рівноважні рівні один одному обсяги попиту $Q^d(t) = Q^{d*} = Q_m - AP^*$, пропозиції $Q(t) = Q^* = Q^{d*}$, продажів $Q^s(t) = Q^{d*}$, замовлень $Q^z(t) = Q^{d*}$ (залишки непроданих товарів відсутні: $Q^0(t) = Q^{0*} = 0$, за їх зберігання не потрібно платити, що зменшує витрати продавця). Нехай у момент часу t = 0 за допомогою деякого зовнішнього впливу ринок виводиться зі стану рівноваги стрибкоподібною зміною цін товарів, що приймають значення $P(0) = P_0 \ne P^*$, і, можливо, штучним створенням на ринку надлишків товарів обсягом $Q^o(0) = Q_0^o$. Це призводить до зміни попиту на товари $Q^d(0) = Q_m - AP_0 \ne Q^{d*}$. А оскільки постачання товарів в обсягах рівноважного замовлення $Q^z(t) = Q^{d*}$ продовжують надходити на ринок ще протягом τ інтервалів дискретного часу (через лаг поставок), над ринком виникає затоварювання тими товарами, ціни на які зросли, і дефіцит тих товарів, ціни на які впали. Відповідно до цього змінюються обсяги продажів та сумарний прибуток продавця. Протягом τ кроків дискретного часу ринок буде некерованим (змінити постачання товарів із метою корекції ситуації та оптимізації ринку неможливо через лаг постачання). Однак починаючи з моменту t = 0 можна шляхом моделювання динаміки ринку відповідно до алгоритму моделювання прогнозувати стан ринку на τ кроків уперед і обчислювати оптимальне значення вектора $\widehat{Q}(\tau)$ постачання товарів на ринок на момент τ. Якщо до цього моменту часу залишки $Q^o(\tau)$ деяких непроданих товарів будуть меншими за відповідні компоненти вектора $\widehat{\mathrm{Q}}(\tau)$, у момент часу t=0 потрібно буде зробити замовлення цих товарів в обсягах відповідних компонент різниці $Q^z(\tau)=\hat{Q}(\tau)-Q^o(\tau)$, щоб на момент τ на ринок надійшла оптимальна кількість цих товарів, що відповідає динамічній рівновазі ринку за цими товарами. За цими товарами на момент часу τ ринок виявиться, таким чином, у зоні 3. Якщо ж для деяких товарів залишки в момент часу τ перевищуватимуть значення відповідних компонентів вектора $\hat{Q}(\tau)$, додаткового замовлення цих товарів робити не потрібно, оскільки їх достатньо для задоволення попиту, але затоварювання ринку за цими товарами на момент часу τ залишиться не ліквідованим, що вплине на ціни товарів у момент часу τ. За цими товарами ринок залишиться у зоні 2. Продовжуючи процес моделювання та передбачення стану ринку на наступні моменти часу, ми прийдемо до ситуації, коли всі залишки товарів будуть продані та ринок перейде у стан динамічної рівноваги (в зону 3) по всіх товарах. Подальший розвиток стану ринку буде динамічно рівноважним з поступовим рухом до асимптотично рівноважного стану (стану спокою).

Висновки. Показано, що стан ринку багатьох (n > 1) товарів характеризується зазначеними трьома можливими зонами по кожному з товарів, що призводить до 3^n можливих зон стану ринку. Цільова функція ринку (сумарний прибуток продавця) є кусочно-диференційованою функцією векторів цін та пропозицій товарів із розривами градієнта цієї функції на лініях рівності попиту та пропозиції, тобто на лініях розділів зон 1 та 2 (у зоні 3), що ускладнює вирішення задачі векторної оптимізації цієї функції. Побудова аналітичного рішення задачі для кожної з 3n зон неможлива. У зв'язку із цим запропоновано оригінальний підхід до уніфікованого представлення цільової кусочно-диференційованої функції через систему індикаторних матричних предикатних функцій, що дало змогу уявити цільову функцію багатьох змінних як умовно-гладку, що всюди диференціюється за гіпотетичних значень предикатних функцій, та отримати аналітичне рішення задачі багатовимірної оптимізації.

Список використаних джерел:

1. Walras L. Elements d'Economie Politique Pure. *Revue de Théologie et de Philosophie et Compte-rendu des Principales Publications Scientifiques*. 1874. Vol. 7. P. 628–632. URL: https://www.jstor.org/stable/44346456?seq =1#metadata_info_tab_contents
2. Arrow K.J., Debreu G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*. 1954. Vol. 22. Issue 3. P. 265–290.
3. Козак Ю.Г., Мацкул В.М. Математичні методи та моделі для магістрів з економіки. Практичні застосування : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2017. 254 с.
4. Білоусова Т.П., Лі В.Е. Математичне моделювання рівноваги функцій попиту та пропозиції. *Сучасна молодь у світі інформаційних технологій* : матеріали ІІ Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. молодих вчених та здобувачів вищої освіти, присвяченої Дню науки, м. Херсон, 14 травня 2021 р. Херсон : ФОП Вишемирський В.С., 2021. С. 152–155.
5. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система. *ФАМЭТ'2011* : труды X Международной конференции, г. Красноярск, 23-24 апреля 2011 г. Красноярск : КГТЭИ – СФУ, 2011. С. 318–323.
6. Поддубный В.В., Романович О.В. Рестриктивная динамическая модель инерционного рынка с оптимальной поставкой товара на рынок в условиях запаздывания. *Вестник Томского государственного университета. УВТИ*. 2011. № 4(17). С. 16–24.
7. Вітлінськкй В.В. Моделювання економіки : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.
8. O'Sullivan, Arthur; Sheffrin, Steven M. (2003) Economics: Principles in Action. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Prentice Hall. P. 550. ISBN 0-13-063085-3
9. Білоусова Т. Математична модель оптимального ринку. *Таврійський науковий вісник. Серія «Економіка»*. 2020. № 8. С. 70–75. DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2021.8.10
10. Білоусова Т. Математична модель оптимального ринку одного товару. *Таврійський науковий вісник. Серія «Економіка»*. 2021. № 9. С. 101–108. DOI: https://doi.org/10.32851/2708-036 6/2021.9.13

References:

1. Walras L. (1874) Elements d'Economie Politique Pure. Revue de Théologie et de Philosophie et Compte-rendu des Principales Publications Scientifiques, **7**, 628–632. Retrieved from: https://www.jstor.org/stable/44346456?seq=1#metadata_info_tab_contents
2. Arrow K.J., Debreu G. (1954) Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22, 3, 265–290.
3. Kozak Yu.H., Matskul V.M. (2017) Matematychni metody ta modeli dlia mahistriv z ekonomiky. Praktychni zastosuvannia: Navch. posib. [Mathematical Methods and Models for Masters in Economics. Practical Applications: a textbook]. Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury.
4. Bilousova T.P., Li V.E. (2021) Matematychne modeliuvannia rivnovahy funktsii popytu ta propozytsii [Mathematical Modeling of the Balance of Supply and Demand Functions]. *Suchasna molod v sviti informatsiinykh tekhnolohii: materialy II Vseukr. nauk.-prakt. internet-konf. molodykh vchenykh ta zdobuvachiv vyshchoi osvity, prysviachenoi Dniu nauky* (Kherson, 14 May, 2021). Kherson: Knyzhkove vydavnytstvo FOP Vyshemyrskyi V.S., pp. 152–155.
5. Poddubnyiy V.V., Romanovich O.V. (2011) Ryinok s fiksirovannoy liniey sprosa kak optimalnaya sistema [Market with a Fixed Demand Line as an Optimal System]. *FAMET'2011: Trudyi X Mezhdunarodnoy konferentsii* (Krasnoyarsk, 23-24 April, 2011). Krasnoyarsk: KGTEI – SFU, pp. 318–323.
6. Poddubnyiy V.V., Romanovich O.V. (2011) Restriktivnaya dinamicheskaya model inertsionnogo ryinka s optimalnoy postavkoy tovara na ryinok v usloviyah zapazdyivaniya [Restrictive Dynamic Model of an Inertial Market with Optimal Delivery of Goods to the Market in Lagging Conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. UVTI*, 4(17), 16–24.
7. Vitlinskii V.V. (2003) Modeliuvannia ekonomiky: navch. posibnyk [Modeling the Economy: a Textbook]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)
8. O'Sullivan Arthur, Sheffrin Steven M. (2003) Economics: Principles in Action. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Prentice Hall, p. 550. ISBN 0-13-063085-3
9. Bilousova T.P. (2021) Matematychna model optymalnoho rynku [Mathematical model of the optimal market]. *Taurian Scientific Bulletin. Series: Economics*, vol. 8, pp. 70–75.
10. Bilousova T.P. (2021) Matematychna model optymalnoho rynku odnoho tovaru [Mathematical model of the optimal market of jne goods]. *Taurian Scientific Bulletin. Series: Economics*, vol. 9, pp. 101–108.