МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.86
DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2021.8.10

Білоусова Т.П.
старший викладач,
Херсонський державний аграрно-економічний університет
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6982-8960

Bilousova Tetiana
Kherson State Agrarian and Economic University

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РИНКУ

MATHEMATICAL MODEL OF THE OPTIMAL MARKET

У статті запропоновано побудову нелінійної динамічної математичної моделі вільного ринку товарів, у якій виконано баланс між пропозицією і попитом та враховується цілеспрямованість кожного учасника ринку. Для досягнення поставленої мети в роботі проведено аналіз теорії та проблеми моделювання ринку. Модель попиту-пропозиції побудована відповідно до системи рекомендацій економічної поведінки на ринку та представлена нелінійною задачею математичного програмування. Шляхом об'єднання математичних моделей попиту та пропозиції математична модель ринку вирішує питання цілеспрямованості учасників ринку в сукупності. Її розв'язок базується на нормалізації критеріїв та принципі гарантованого результату. Методологія моделювання ринку з урахуванням функцій попиту і пропозиції включає постановку задачі, побудову моделі та безпосередньо прогнозування.
Ключові слова: *математична модель, функція попиту, функція пропозиції, рівновага, емпіричні дані, лінійний зв'язок.*

В статье предложено построение нелинейной динамической математической модели свободного рынка товаров, в которой выполнен баланс между предложением и спросом и учитывается целеустремленность каждого участника рынка. Для достижения поставленной цели в работе проведен анализ теории и проблемы моделирования рынка. Модель спроса-предложения построена в соответствии с системой рекомендаций экономического поведения на рынке и представлена нелинейной задачей математического программирования. Путем объединения математических моделей спроса и предложения математическая модель рынка решает вопрос целеустремленности участников рынка в совокупности. Ее решение базируется на нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Методология моделирования рынка с учетом функций спроса и предложения включает постановку задачи, построение модели и непосредственно прогнозирования.
Ключевые слова: *математическая модель, функция спроса, функция предложения, равновесие, эмпирические данные, линейная связь.*

The paper investigates the limiting (potential) possibilities of obtaining the maximum total income of the seller in the free market of many goods with the subsequent synthesis of the optimal deterministic strategy for supplying goods to the market. The market process consists of many acts of exchange of goods and services. Each such act involves a seller, on whose side there is a supply of goods, and a buyer, represented by a demand for goods. Of course, supply and demand are closely related and continuously interacting categories and serve as a link *between production and consumption. The result of the interaction of supply and demand is the equilibrium price. It characterizes the state of the market in which the volume of demand is equal to the supply. To determine the point of market equilibrium and study the dynamics of commodity prices in the process of market transition from some no equilibrium to equilibrium is considered, in addition to demand lines, the criterion of optimal behavior of the seller in the market. This criterion, obviously, should be based on the fact that the seller seeks, on the one hand, to meet the needs of the buyer in each of the goods, and on the other hand - to ensure maximum profit. According to this criterion, the market will provide optimal prices for goods at any, including optimal, sizes of deliveries of goods to the market. The construction of a nonlinear dynamic mathematical model of a free market for goods is proposed, in which a balance is made between supply and demand, taking into account the purposefulness of each market participant. To achieve this goal, the paper analyzes the theory and problems of market modeling. The supply-demand model is built in accordance with a system of recommendations for economic behavior in the market, and is represented by a nonlinear problem of mathematical programming. By combining mathematical models of supply and demand, the mathematical model of the market solves the issue of purposefulness of market participants in the aggregate. Its solution is based on the normalization of criteria and the principle of a guaranteed result. The methodology for modeling the market, taking into account the functions of supply and demand, includes setting a problem, building a model and directly forecasting.*

Key words: *mathematical model, demand function, supply function, equilibrium, empirical data, linear relationship.*

Постановка проблеми. Використання математичного моделювання в економіці дає змогу зробити більш глибоким кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, зробити більш ефективними економічні розрахунки. Математична модель відрізняється за своєю природою від оригіналу, але дослідження властивостей оригіналу за допомогою математичної моделі зручніше, є більш дешевим та займає менше часу. Застосування методу математичного моделювання в економіці – це об'єктивний етап її розвитку, пов'язаний з існуванням стійких кількісних закономірностей і можливістю формалізованого опису багатьох, хоча й далеко не всіх, економічних процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема побудови моделі ринку, моделювання та прогнозування його розвитку є однією з найважливіших проблем економіки у зв'язку з переходом України на ринкові відносини. Більшість моделей ринку будувалася за принципом установлення конкурентної рівноваги, про існування якої було заявлено в роботі Л. Вальраса [1]. Математичне обґрунтування гіпотези Вальраса було виконано в 1950-х роках у роботах К. Ерроу, Г. Дебре [2], А. Маккензі, В. Гейла, М. Никайдо. Надалі велися роботи з удосконалення моделей та їх узагальнення. Досить повно ці дослідження розглянуті в монографіях О. Морішіми, М. Никайдо, Н. Ланкастера та інших сучасних авторів. У більшості цих робіт аналізувався баланс сукупної пропозиції та попиту (ринкова рівновага) [3; 4]. Ці моделі ринку встановлювали баланс між пропозицією та попитом, але не могли бути моделлю ринку, оскільки в них, по-перше, була відсутня конкуренція як між виробниками, так і між споживачами, по-друге, не відображена цілеспрямованість дій учасників ринку (виробників та споживачів), яка є основою конкуренції. Не досягли прогресу в цьому питанні ігрові моделі. У математичній моделі ринку мали бути враховані не тільки протиріччя між виробниками та споживачами, але й протиріччя (конкуренція) окремих виробників і споживачів між собою. Як правило, цілями виробника є створення дешевого продукту і його продаж за високою ціною, а споживача – купівля продукту з найбільш низькою ціною, але з високою якістю.

Формулювання цілей статті. Модель ринку повинна відображати не тільки баланс між пропозицією та попитом, але й цілеспрямованість кожного учасника ринку з урахуванням їх загального взаємозв'язку. Такою математичною моделлю, яка може разом із балансом відобразити цілеспрямованість кожного учасника ринку, є векторна (багатокритеріальна) задача математичного програмування [3]. Для вирішення цього завдання розроблені методи розв'язання векторної задачі, засновані на нормалізації критеріїв та принципі гарантованого результату.

Виклад основного матеріалу. Пропонована математична модель вільного ринку багатьох конкуруючих (і/або супутніх) товарів в умовах запізнювання поставок товарів на ринок за лінійної функції попиту є узагальненням і розвитком математичної моделі ринку одного товару [5; 6]. Нехай P – ціна товару, Q – обсяг поставленого на ринок товару. У класичній теорії ринкової рівноваги Л. Вальраса та А. Маршалла («павутиноутворювальна» модель, модель Еванса тощо) [7] рівноважний стан ринку одного товару досягається за таких значень: $P*$, $Q*$ змінних P і Q, за яких лінії попиту і пропозиції товару перетинаються. Зазвичай вважають, що ці лінії поблизу точки рівноваги прямі: $Q^d = Q_m - aP$ (лінія попиту), $Q = Q_n + bP$ (лінія пропозиції), де $Q_m. > Q_n$, $a. > 0, b > 0$ – параметри цих ліній, отже, точка рівноваги досягається при $Q^d = Q$ (попит дорівнює пропозиції):

$$Q_m - aP* = Q_n + bP*,$$

звідки знаходиться точка (P*, Q*) ринкової рівноваги, тобто рівноважний стан ринку:

$$P* = \frac{Q_m - Q_n}{a+b}, \quad Q* = Q_n + bP* = \frac{aQ_m + bQ_n}{a+b}.$$

У реальних умовах лінію попиту можна з певним ступенем точності побудувати на основі емпіричних даних про обсяги продажів товару за різних цін, що дає змогу вважати лінію попиту відомою [8–10]. Однак лінія пропозиції зазвичай залишається невідомою. Виникає питання про те, яким чином можна знайти точку ринкової рівноваги і досліджувати поведінку ринку поблизу точки рівноваги без використання лінії пропозиції. Яка стратегія поставки товару на ринок є оптимальною з точки зору максимуму прибутку продавця? Раніше розглядали ринок одного товару як оптимально самоврядну динамічну систему, яка автоматично встановлює оптимальне (в сенсі максимального прибутку продавця) значення ціни товару за заданої лінії попиту і за оптимальної детермінованої стратегії поставки товару на ринок в умовах запізнювання поставок. У роботі ми досліджуємо граничні (потенційні) можливості отримання максимального сумарного прибутку продавця на вільному ринку багатьох товарів із подальшим синтезом оптимальної детермінованої стратегії поставки товарів на ринок. Нехай стан ринку n товарів у момент t дискретного часу (на t-му часовому інтервалі, крок функціонування ринку, t = 0, 1, 2,...) характеризується n-вектором цін товарів P (t) та n-вектором обсягів товарів Q (t), що поставляються на ринок. Для визначення точки ринкової рівноваги та дослідження динаміки цін товарів у процесі переходу ринку з деякого нерівноважного стану до рівноважного необхідно ввести в розгляд, крім ліній попиту, критерій оптимальності поведінки продавця на ринку. Цей критерій, очевидно, повинен ґрунтуватися на тому, що продавець прагне, з одного боку, задовольнити потребу покупця в кожному з товарів (з міркувань власної вигоди, адже якщо купівельний попит не задоволений, то продавець просто недоотримує прибуток), а з іншого боку, забезпечити собі максимальний прибуток. Згідно з цим критерієм, ринок забезпечить оптимальні ціни товарів за будь-яких, у тому числі оптимальних, розмірів поставок товарів на ринок. Побудуємо математичну модель ринку, яка відповідає цьому критерію.

Математична постановка задачі.

Нехай у момент t дискретного часу n-вектор-стовпець попиту $Q^d(t)$ на товари лінійно залежить від n-вектору-стовпця P(t) цін товарів:

$$Q^d(t) = Q_m - AP(t), \tag{1}$$

де Q_m – n-вектор-стовпець параметрів, A – $n \times n$ – матриця коефіцієнтів, які залежать від часу, цін і обсягів поставок товарів та визначають цінову еластичність попиту по кожному з товарів:

$$e_{ij}=\frac{\partial Q_i^d}{\partial P_j}\cdot\frac{P_j}{Q_i^d}=-A_{ij}\cdot\frac{P_j}{Q_i^d},\quad \left(i,j=\overline{1,n}\right).$$

Під час виходу n-вектору P(t) за межі області, яка визначається векторною нерівністю $Q_m-AP(t)\geq 0$, відповідні компоненти вектору попиту $Q^d(t)$ повинні перетворюватися в 0. Тому:

$$Q_i^d(t)=\begin{cases}Q_{mi}-\left(AP(t)\right)_i, \text{якщо} \mathrm{Q_{mi}}-\left(AP(t)\right)_i>0,\\ 0, \text{якщо } \mathrm{Q_{mi}}-\left(AP(t)\right)_i\leq 0,\end{cases}\quad \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{2}$$

Нехай у момент часу t (точніше, на початку t-го інтервалу дискретного часу функціонування ринку) на ринок постачається $Q_i(t)$ одиниць і-го товару $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Якщо пропозиція $Q_i(t)$ перевищує попит $Q_i^d(t)$ на цей товар за n-вектору цін P(t) (на цей товар та всі конкуруючі та супутні товари), то, вочевидь, продавець зможе продати тільки $Q_i^d(t)$ одиниць і-го товару. Якщо ж пропозиція $Q_i(t)$ менше попиту $Q_i^d(t)$, то буде проданий весь і-й товар, який поступив на ринок. Отже, n-вектор обсягів продажів $Q^s(t)$ на t-му інтервалі дискретного часу може бути виражений рестриктивним (підпорядкованим обмеженням типу нерівностей) співвідношенням:

$$Q_i^s(t)=\begin{cases}Q_i^d(t), \text{якщо} \mathrm{Q_i^d}(t)<Q_i(t),\\ Q_i(t), \text{якщо } \mathrm{Q_i^d}(t)\geq Q_i(t),\end{cases}\quad \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{3}$$

що можна коротко записати у такому вигляді: $Q^s(t)=\min\left(Q^d(t),Q(t)\right)$,

де $\min\left(Q^d(t),Q(t)\right)$, розуміється як результат покомпонентного порівняння векторів $Q^d(t)$ та $Q(t)$. При $Q_i^d(t)>Q_i(t)$ маємо дефіцит і-го товару (зона 1), при $Q_i^d(t)<Q_i(t)$ – затоварення ринку по і-му товару (зона 2), при $Q_i^d(t)=Q_i(t)$ – динамічну рівновагу ринку по і-му товару (зона 3). Обсяги залишків товарів, які не продані на t-му інтервалі часу, виражаються n-вектором:

$$Q^o(t+1)=Q(t)-Q^s(t). \tag{4}$$

Уявимо n-вектор обсягів $Q(t)$ товарів, що поставляються на ринок у момент часу t, у вигляді суми n-вектору обсягів $Q^o(t)$ залишків товарів від продажів на попередньому інтервалі дискретного часу, які перейшли на ринок у момент t, і товарів в обсязі n-вектору $Q_i^z(t)$, замовлених продавцем додатково для поставки на ринок до цього моменту часу:

$$Q(t)=Q^o(t)+Q^z(t), \tag{5}$$

що приводить до рекурентного співвідношення для залишків непроданих товарів:

$$Q^o(t+1)=Q^o(t)+Q^z(t)-Q^s(t). \tag{6}$$

Нехай ціни одиниць товарів під час їх замовлення (покупці на оптовому ринку або у виробника) складають n-векторну величину P_1, а ціни зберігання одиниць товарів, не проданих на попередньому інтервалі дискретного часу, складають n-вектор P_2. Тоді прибуток продавця, одержуваний до кінця t-го інтервалу дискретного часу, складе таку величину:

$$J(t)=Q^{sT}(t)P(t)-Q^{zT}(t)P_1-Q^{oT}(t)P_2-\frac{1}{2}\left(P(t)-P(t-1)\right)^T R\left(P(t)-P(t-1)\right), \tag{7}$$

де T – знак транспонування; перший доданок $Q^{sT}(t)P(t)$ є виручкою від продажів $Q^s(t)$ одиниць товару за цінами P(t); другий доданок – витрати продавця на закупівлю додаткової кількості $Q^z(t)$ товару за цінами P_1; третій доданок $Q^{oT}(t)P_2$ – витрати продавця на зберігання залишків непроданого товару в обсягах $Q^o(t)$ за цінами P_2. Четвертий доданок є штрафною функцією, «штрафом», який вводиться на продавця за зміну цін P(t) товарів у момент часу t по відношенню до цін товарів P(t-1) на попередньому (t-1)-му інтервалі дискретного часу. Тут R – позитивно визначена матриця (в найпростішому випадку – діагональна). Штрафна функція забезпечує деяку інерційність ринку щодо змін цін товарів (за різке підвищення ціни можуть застосуватися санкції законодавчого характеру, за різке зниження ціни – «санкції» конкурентів, що виражаються в нанесенні збитку продавцеві в розмірі, еквівалентному цій штрафній функції). Введення штрафної функції в цільову функцію математичної моделі ринку відображає облік деяких реальних обмежень на «свободу конкуренції». У разі діагональної матриці R кожний діагональний елемент $R_{ij} > 0$ (вага штрафної функції по i-му товару) може бути величиною постійною, але може залежати від знаку різниці $P_i(t) - P_i(t-1)$. Наприклад, $R_{ii} = R_{i+}$ при $P_i(t) > P_i(t-1)$ та $R_{ii} = R_{i-}$ при $P_i(t) < P_i(t-1)$, причому $R_{i+} \neq R_{i-}$, що моделює явище «цінового гистерезису» ринку (при $R_{i+} < R_{i-}$ ринок менш охоче знижує ціну, ніж підвищує її). Для спрощення будемо вважати далі, що $R_{i+} = R_{i-} = R_i$ (відсутність цінового гистерезису). Виникає питання про те, яке значення має прийняти n-вектор P(t) цін товарів у момент часу t, якщо на попередньому інтервалі він дорівнював P(t-1), і яку величину $Q^z(t)$ додаткової поставки товарів на ринок повинен зробити продавець, щоби прибуток продавця за заданої лінії попиту (1) на t-му інтервалі дискретного часу був максимальним:

$$J(t) \Rightarrow \underset{P(t),Q^z(t)}{SUP}. \tag{8}$$

При цьому повинні виконуватися обмеження на величину n-вектору P(t) можливих цін товарів зверху (2) та знизу ($P(t) > P_1$) і на величину додаткового замовлення товару ($Q^z(t) \geq 0$). Нехай вектор обсягів поставки товарів на ринок у момент часу t є $Q\ (t)$. Знайдемо оптимальний (що забезпечує максимум прибутку продавця (7)) вектор цін P(t) товарів за фіксованого значення $Q\ (t)$: $J(t) \Rightarrow \max\limits_{P(t)|Q(t)}$. Під час розв'язання цієї задачі з огляду на її рестриктивний через співвідношення (3) характер, очевидно, слід брати до уваги, що кожен товар може виявитися в момент часу t у будь-якій із трьох вищезазначених зон (дефіциту, затоварення або балансу попиту і пропозиції). Оскільки цільова функція J(t) по кожному товару в кожній зоні поводиться по-різному, під час розв'язання задачі оптимізації необхідний перебір 3n зон стану ринку по всіх товарах.

Висновки. Отримана нелінійна рестриктивна (модель, що підкоряється обмеженням типу нерівностей) динамічна математична модель вільного ринку багатьох товарів в умовах лагу поставок товарів на ринок і лінійної залежності вектору попиту від вектору цін. Знайдені оптимальні з точки зору прибутку продавця ціни та поставки товарів на ринок. Показано, що максимальний сумарний прибуток продавця виражається безперервною кусочно-гладкою функцією вектору обсягів поставок з розривом похідних на кордонах зон товарного дефіциту, затоварення та динамічної рівноваги ринку по кожному з товарів.

Список використаних джерел:

1. Walras L. Elements d'Economie Politique Pure. *Revue de Théologie et de Philosophie et Compte-rendu des Principales Publications Scientifiques.* 1874. Vol. 7. P. 628–632. URL: https://www.jstor.org/stable/44346456?seq=1#metadata_info_tab_contents.

2. Arrow K.J., Debreu G. Existence of Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica.* 1954. Vol. 22. Issue 3. P. 265–290.

3. Козак Ю.Г., Мацкул В.М. Математичні методи та моделі для магістрів з економіки. Практичні застосування : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2017. 254 с.

4. Білоусова Т.П., Лі В.Е. Математичне моделювання рівноваги функцій попиту та пропозиції. *Сучасна молодь в світі інформаційних технологій :* матеріали II Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції молодих вчених та здобувачів вищої освіти, присвяченої Дню науки (м. Херсон, 14 травня 2021 р.). Херсон : Книжкове видавництво ФОП Вишемирський В.С., 2021. С. 152–155.

5. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система. *ФАМЭТ'2011 :* Труды X Международной конференции (г. Красноярск, 23–24 апреля 2011 г.). Красноярск : КГТЭИ-СФУ, 2011. С. 318–323.

6. Поддубный В.В., Романович О.В. Рестриктивная динамическая модель инерционного рынка с оптимальной поставкой товара на рынок в условиях запаздывания. *Вестник Томского государственного университета.* 2011. № 4 (17). С. 16–24.

7. Вітлінській В.В. Моделювання економіки : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.

8. Лєпа Є.В., Дебела І.М. Прогнозування соціально-економічних процесів : навчальний посібник. Херсон : Херсонська міська друкарня, 2007. 184 с.

9. Дебела І.М. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник. Херсон, 2011. 348 с.

10. Димова Г.О. Методи і моделі упорядкування експериментальної інформації для ідентифікації і прогнозування стану безперервних процесів : монографія. Херсон : Книжкове видавництво ПП Вишемирський В.С., 2020. 176 с.

References:

1. Walras L. (1874) Elements d'Economie Politique Pure. *Revue de Théologie et de Philosophie et Compte-rendu des Principales Publications Scientifiques,* no. 7, pp. 628–632. Available at: https://www.jstor.org/stable/44346456?seq=1#metadata_info_tab_contents.

2. Arrow K.J., Debreu G. (1954) Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica,* no. 22(3), pp. 265–290.

3. Kozak Yu.H., Matskul V.M. (2017) Matematychni metody ta modeli dlia mahistriv z ekonomiky. Praktychni zastosuvannia: Navch. posib. [Mathematical Methods and Models for Masters in Economics. Practical Applications: a textbook]. Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury.

4. Bilousova T.P., Li V.E. (2021) Matematychne modeliuvannia rivnovahy funktsii popytu ta propozytsii [Mathematical Modeling of the Balance of Supply and Demand Functions]. *Suchasna molod v sviti informatsiinykh tekhnolohii:* materialy II Vseukr. nauk.-prakt. internet-konf. molodykh vchenykh ta zdobuvachiv vyshchoi osvity, prysviachenoi Dniu nauky (Kherson, 14 May, 2021). Kherson: Knyzhkove vydavnytstvo FOP Vyshemyrskyi V.S., pp. 152–155.

5. Poddubnyiy V.V., Romanovich O.V. (2011) Ryinok s fiksirovannoy liniey sprosa kak optimalnaya sistema [Market with a Fixed Demand Line as an Optimal System]. *FAMET'2011:* Trudyi H Mezhdunarodnoy konferentsii. (Krasnoyarsk, 23–24 April, 2011). Krasnoyarsk: KGTEI-SFU, pp. 318–323.

6. Poddubnyiy V.V., Romanovich O.V. (2011) Restriktivnaya dinamicheskaya model inertsionnogo ryinka s optimalnoy postavkoy tovara na ryinok v usloviyah zapazdyivaniya [Restrictive Dynamic Model of an Inertial Market with Optimal Delivery of Goods to the Market in Lagging Conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. UVTI,* no. 4 (17), pp. 16–24.

7. Vitlinskii V.V. (2003) Modeliuvannia ekonomiky [Modeling the Economy]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)

8. Liepa Ye.V., Debela I.M. (2007) Prohnozuvannia sotsialno-ekonomichnykh protsesiv [Forecasting of Socio-Economic Processes]. Kherson: Khersonska miska drukarnia. (in Ukrainian)

9. Debela I.M. (2011) Ekonomiko-matematychne modeliuvannia [Economic and Mathematical Modeling]. Kherson: Khersonska miska drukarnia. (in Ukrainian)

10. Dymova H.O. (2020) Metody i modeli uporyadkuvannya eksperymental'noyi informatsiyi dlya identyfikatsiyi i prohnozuvannya stanu bezperervnykh protsesiv [Methods and models for ordering experimental information for identifying and predicting the state of continuous processes]. Kherson: Publishing house FOP Vyshemyrskyy V.S. (in Ukrainian)